

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE **L. FEJÉR** **A. E. INGHAM**

H. KNESER **W. MAGNUS** **O. PERRON**

W. SÜSS **H. WEYL**

62. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. APRIL 1955)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1955

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

62. Band	Inhalt	2. Heft Seite
Dold, A., Über fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen		111
André, J., Projektive Ebenen über Fastkörpern		137
Meschkowski, H., Darstellung analytischer Funktionen durch den Randwinkel des Bildbereiches		161
Carlitz, L., Some class number relations		167
Foster, A. L., The identities of — and unique subdirect factorization within — classes of universal algebras		171
Stoll, W., Über meromorphe Modifikationen. III		189

Über fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen.

Von

ALBRECHT DOLD.

Einleitung.

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$ (zur Definition s. STEENROD [8]¹⁾) über der gleichen Basis X heißen fasernweise homotopieäquivalent (vgl. THOM [9], S. 164), wenn es stetige Abbildungen $h_1: B_1 \rightarrow B_2$ und $h_2: B_2 \rightarrow B_1$ gibt, die für jedes $x \in X$ die Faser über x in die Faser über x abbilden [d. h. $h_1(p_1^{-1}(x)) \subset p_2^{-1}(x)$ und $h_2(p_2^{-1}(x)) \subset p_1^{-1}(x)$; sog. fasernweise Abbildungen] und die die Eigenschaft haben, daß die zusammengesetzten Abbildungen $h_2 \circ h_1$ und $h_1 \circ h_2$ durch fasernweise Deformationen in die Identität von B_1 resp. B_2 übergeführt werden können. Dabei ist eine fasernweise Deformation eine solche, bei der jeder Punkt nur innerhalb seiner Faser sich bewegen darf.

Es wird der Satz bewiesen (§ 2), daß zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, X ein zusammenhängendes Polyeder, Y_i lokal kompakt, schon dann fasernweise homotopieäquivalent sind, wenn es eine fasernweise Abbildung $h: B_1 \rightarrow B_2$ gibt, deren Einschränkung auf eine Faser eine (gewöhnliche) Homotopieäquivalenz zwischen Bild- und Urbildfaser ist. Beim Beweis und auch bei den Anwendungen dieses Satzes in § 3 spielen die in § 1 untersuchten Abbildungsräume $\mathfrak{G}(Y_i, Y_k)$, $i, k = 1, 2$, eine Rolle; $\mathfrak{G}(Y_i, Y_k)$ bezeichnet die mit der „kompakt-offenen“ Topologie versehene Menge der stetigen Abbildungen von Y_i in Y_k .

Der dritte Paragraph enthält eine Klassifikation der Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$, Y lokal kompakt, S^m die m -Sphäre, bezüglich der fasernweisen Homotopieäquivalenz, die der auf FELDBAU zurückgehenden, in [8], § 18 dargestellten Klassifikation dieser Faserräume bezüglich der gewöhnlichen Äquivalenz entspricht. Genauer gesagt handelt es sich beide Male nur um eine Zurückführung des Klassifikationsproblems auf die Berechnung gewisser Homotopiegruppen.

Unter Benützung der Ergebnisse von J. P. SERRE [6] über die Gruppen $\pi_m(S^n)$ werden im Falle $Y = S^n$, $G = O_{n+1}$ = Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n , die in Frage kommenden Homotopiegruppen teilweise berechnet. Damit ergibt sich:

Eine volle Klasse fasernweise homotopieäquivalenter Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ enthält genau dann unendlich viele paarweise nicht

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

2. Die Operatorengruppe $\pi_1(\mathfrak{G}, e)$ von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ wirkt trivial, d.h. für jeden geschlossenen Weg $C: I \rightarrow \mathfrak{G}$, $C(0) = e = C(1)$ ist der induzierte Automorphismus $C^\# : \pi_n(\mathfrak{G}, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ (s. [8], § 16, insbesondere 16.4) die Identität.

H. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes 1 sei $g \in \mathfrak{G}$ und $g \simeq e$. $D: I \rightarrow \mathfrak{G}$ sie ein Weg von e nach g (s. C). Der durch D induzierte Isomorphismus $D^\# : \pi_n(\mathfrak{G}, g) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ ist unabhängig von der Auswahl des Weges D (die Bogenkomponente von e in $\mathfrak{G}$ ist n -einfach nach H.S. 1; s. [8], 16.5). Wir identifizieren $\pi_n(\mathfrak{G}, g)$ mit $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ vermöge des Isomorphismus $D^\#$.

Diese Identifikation läßt sich folgendermaßen beschreiben (s. [8], § 16): Es seien $g: (S^n, x_0) \rightarrow (\mathfrak{G}, e)$ resp. $g': (S^n, x_0) \rightarrow (\mathfrak{G}, g)$ Abbildungen aus $\alpha \in \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ resp. $\alpha' \in \pi_n(\mathfrak{G}, g)$, (S^n, x_0) die n -Sphäre mit Bezugspunkt x_0 . α und α' werden genau dann identifiziert, wenn g und g' ineinander deformiert werden können.

I. $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien beliebige topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\gamma: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $\gamma^-: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Y}$ gibt derart, daß $\gamma^- \circ \gamma$ und $\gamma \circ \gamma^-$ der Identität von $\mathfrak{Y}$ resp. $\mathfrak{Z}$ homotop sind. γ^- heißt dann ein *Homotopieinverses* von γ . Man sagt $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien *vom gleichen Homotopietyp*, wenn es eine Homotopieäquivalenz $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ gibt.

Sind Y und Z lokal kompakte topologische Räume, dann bezeichnet $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ die mit der induzierten Topologie versehene Menge der Homotopieäquivalenzen in $\mathfrak{G}(Y, Z)$ (s. A).

J. Es sei $g: Y \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz und g^- ein Homotopieinverses von g (s. I).

1. Ist $'g$ eine stetige Abbildung von Y in Z und $'g \simeq g$, dann ist auch $'g$ eine Homotopieäquivalenz, und g^- ist ein Homotopieinverses von $'g$.

2. Ist $'g^-: Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $'g^- \circ g \simeq e_Y$ (= Identität von Y), dann ist $'g^- \simeq g^-$.

Hieraus und aus C folgt: $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. I) besteht aus vollen Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}(Y, Z)$. Alle Homotopieinversen von $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ liegen in der gleichen Bogenkomponente von $\mathfrak{G}(Z, Y)$.

Beweis. e_Y, e_Z seien die identischen Selbstabbildungen von Y, Z .

1. Aus $'g \simeq g$ folgt $g^- \circ 'g \simeq g^- \circ g \simeq e_Y$, ebenso $'g \circ g^- \simeq e_Z$.

2. Aus $'g^- \circ g \simeq e_Y$ folgt $g^- = e_Y \circ g^- \simeq ('g^- \circ g) \circ g^- = 'g^- \circ (g \circ g^-) \simeq 'g^- \circ e_Z = 'g^-$.

K. Sind Y, Z, W topologische Räume, $g_1: Y \rightarrow Z$ und $g_2: Z \rightarrow W$ Homotopieäquivalenzen (s. I) und g_1^- resp. g_2^- Homotopieinverse von g_1 resp. g_2 , dann ist $g_2 \circ g_1$ eine Homotopieäquivalenz und $g_1^- \circ g_2^-$ ein Homotopieinverses von $g_2 \circ g_1$. Insbesondere ist $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) abgeschlossen bezüglich der $\circ$ -Multiplikation.

Beweis. e_Y, e_Z, e_W seien die Identitäten von Y, Z, W . Dann ist $(g_2 \circ g_1) \circ (g_1^- \circ g_2^-) = g_2 \circ (g_1 \circ g_1^-) \circ g_2^- \simeq g_2 \circ e_Z \circ g_2^- = g_2 \circ g_2^- \simeq e_W$, ebenso $(g_1^- \circ g_2^-) \circ (g_2 \circ g_1) \simeq e_Y$.

L. Für $k = 0, 1$, seien $g_k, g'_k \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A), $g_0 \simeq g_1, g'_0 \simeq g'_1$. Dann ist $g'_0 \circ g_0 \simeq g'_1 \circ g_1$. Bezeichnet allgemein $\bar{g}$ die Bogenkomponente von $g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$

($\bar{g}$ ist nach C gerade die Homotopieklasse von g), so können wir also das $\circ$ -Produkt von $\bar{g}_0$ mit $\bar{g}_1$ durch $\bar{g}_0 \circ \bar{g}_1 = \overline{g_0 \circ g_1}$ in eindeutiger Weise definieren.

Bezüglich dieser Multiplikation bilden die Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ [die nach J auch Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ sind] eine Gruppe, die wir in Analogie zu [8], 16.10 mit $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ bezeichnen.

Beweis. Es seien g, g', g'' beliebige Elemente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$, g^- ein Homotopieinverses von g , e die Identität von Y . 1. Abgeschlossenheit bezüglich der $\circ$ -Multiplikation: Nach K ist $g \circ g' \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$, also $\bar{g} \circ \bar{g}' = \overline{g \circ g'}$ eine Bogenkomponente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$. 2. Assoziativität: $\bar{g} \circ (\bar{g}' \circ \bar{g}'') = \overline{g \circ (g' \circ g'')} = \overline{(g \circ g') \circ g''} = (\bar{g} \circ \bar{g}') \circ \bar{g}''$. 3. Existenz der Linkseins: $\bar{e} \circ \bar{g} = \overline{e \circ g} = \bar{g}$. 4. Existenz des Linksinversen: $\bar{g}^- \circ \bar{g} = \overline{g^- \circ g} = \bar{e}$.

M. Es seien Y und Z topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, $g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ und g_1^- ein Homotopieinverses von g_1 (s. I). Wir definieren eine stetige Abbildung $\mathfrak{G}(Y, Y) \rightarrow \mathfrak{G}(Z, Z)$ (s. A) durch

$$g \rightarrow g_1 \circ g \circ g_1^-, \quad g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$$

und nennen sie *eine Transformation mit g_1* .

N. Y, Z, W seien topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, g resp. $'g$ sei eine Transformation mit $g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ resp. $'g_1 \in \mathfrak{G}_1(Z, W)$. Dann ist $'g \circ g$ eine Transformation mit $'g_1 \circ g_1$.

Beweis. g resp. $'g$ sei durch $g \rightarrow g_1 \circ g \circ g_1^-, g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ resp. $'g \rightarrow 'g_1 \circ 'g \circ 'g_1^-, 'g \in \mathfrak{G}(Z, Z)$ gegeben (g_1^- resp. $'g_1^-$ homotopieinvers zu g_1 resp. $'g_1$). Nach K ist $'g_1 \circ g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, W)$ und $g_1^- \circ 'g_1^-$ homotopieinvers zu $'g_1 \circ g_1$. Die Abbildung $g \rightarrow ('g_1 \circ g_1) \circ g \circ (g_1^- \circ 'g_1^-)$ (d. i. $'g \circ g$) ist also eine Transformation mit $'g_1 \circ g_1$.

O. Ist $g_k: \mathfrak{G}(Y, Y) \rightarrow \mathfrak{G}(Z, Z)$, $k=0, 1$, eine Transformation mit $g_k \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. M) und ist $g_0 \simeq g_1$, dann ist auch $g_0 \simeq g_1$.

Beweis. g_k sei durch $g \rightarrow g_k \circ g \circ g_k^-, g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ gegeben (g_k^- homotopieinvers zu g_k). Aus $g_0 \simeq g_1$ folgt $g_0^- \simeq g_1^-$ (s. J). $C: I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Z)$ resp. $C^-: I \rightarrow \mathfrak{G}(Z, Y)$ sei ein Weg, der g_0 mit g_1 resp. g_0^- mit g_1^- verbindet (s. C). Dann ist

$$(g, t) \rightarrow C(t) \circ g \circ C^-(t), \quad g \in \mathfrak{G}(Y, Y), \quad t \in I$$

eine Deformation von g_0 in g_1 .

P. Jede Transformation mit einem Element aus $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. M) ist eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere: Sind Y und Z topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, dann auch $\mathfrak{G}(Y, Y)$ und $\mathfrak{G}(Z, Z)$ (s. A).

Beweis. Es seien g eine Transformation mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$, g^- ein Homotopieinverses von g und g^- eine Transformation mit g^- . Nach N ist $g^- \circ g$ eine Transformation mit $g^- \circ g$. Die Identität von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist eine Transformation mit e (= Identität von Y), also wegen $e \simeq g^- \circ g$ in $g^- \circ g$ deformierbar (s. O). Entsprechend kann $g \circ g^-$ in die Identität von $\mathfrak{G}(Z, Z)$ deformiert werden. g ist also eine Homotopieäquivalenz und g^- ein Homotopieinverses von g .

Q. Eine Transformation mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. M) ist eine stetige Selbstabbildung von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(Y, Y)$, bei der e , die Identität von Y , in $g \circ g^-$ übergeht (g^- ein gewisses Homotopieinverses von g). Sie induziert daher einen Homomorphismus $g_*: \pi_n(\mathfrak{G}, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}, g \circ g^-)$, $n \geq 1$ (s. [8], 15.5). Wegen $g \circ g^- \simeq e$

können wir $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ und $\pi_n(\mathfrak{G}, g \circ g^{-1})$ in natürlicher Weise identifizieren (s. H). g_* wird damit zu einem Endomorphismus von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$.

Transformationen mit Elementen aus der gleichen Bogenkomponente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ sind homotope Abbildungen (s. O) und induzieren daher den gleichen Endomorphismus g_* . Bezeichnet $\bar{g}$ die Bogenkomponente von g , so können wir also durch die Festsetzung $\bar{g}_* = g_*$ in eindeutiger Weise jeder Bogenkomponente $\bar{g}$ von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$, d.h. jedem Element von $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ (s. L), einen Endomorphismus $\bar{g}_*$ von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ zuordnen.

Eine Transformation erst mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$, dann mit $g' \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ ergibt eine Transformation mit $g' \circ g$ (s. N). Also ist $(g' \circ g)_* = g'_* \circ g_*$. Daraus folgt $(g' \circ \bar{g})_* = \bar{g}'_* \circ \bar{g}_*$. Die Identität von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist eine Transformation mit e , also $\bar{e}_*$ die Identität von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$. Wir erhalten somit:

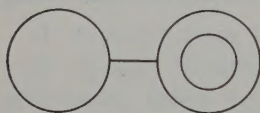


Fig. 1.

Durch die Zuordnung $\bar{g} \rightarrow \bar{g}_*$ wird $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ zur Operatorengruppe von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$, $n > 0$.

Diese Aussage bleibt richtig für $n=0$, wenn wir dann unter $\bar{g}_*$ den durch $\bar{g}$ bestimmten inneren Automorphismus von $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ verstehen.

Bemerkung 1. Die Menge der Homöomorphismen von Y auf sich ist in $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) enthalten. Das Beispiel der Sphären könnte vielleicht zur Vermutung führen, daß allgemein jede Homotopieäquivalenz $Y \rightarrow Y$ sich in einen Homöomorphismus deformieren läßt, zumindest wenn Y zusammenhängend ist. Wir geben folgendes Gegenbeispiel:

Y bestehe aus einem abgeschlossenen Kreisring, einer Kreislinie und einer Strecke, die beide verbindet (s. Fig. 1). Die Abbildung $g: Y \rightarrow Y$ bestehe darin, daß man zunächst den Kreisring radienweise auf den äußeren Randkreis drückt und dann das so entstehende Gebilde an der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke spiegelt. Dann ist $g \circ g \simeq e$, aber g nicht in eine topologische Abbildung deformierbar.

§ 2. Fasernweise Abbildungen und fasernweise Homotopieäquivalenz.

R. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Faserraum (fibre bundle bei STEENROD [8], § 2). Durch die Schreibweise $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ bringen wir zum Ausdruck, daß B der gefaserte Raum (bundle space), X die Basis (base space), $p: B \rightarrow X$ die Projektion (projection), und G die Strukturgruppe (group of the bundle) von $\mathfrak{B}$ ist.

Ist A ein Teilraum von X , dann bezeichnet $\mathfrak{B}|A = \{p^{-1}(A), p_A, A, Y, G\}$ den über A gelegenen Teil von $\mathfrak{B}$; $p_A: p^{-1}(A) \rightarrow A$ ist dabei die durch p definierte Abbildung⁵⁾ (vgl. [8], 9.2).

Definition 1. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung. Unter einer fasernweisen

⁵⁾ $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien Mengen, $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ eine Abbildung, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ und $\mu(\mathfrak{M}') \subset \mathfrak{N}'$. Wir nennen die Abbildung $\mu': \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{N}'$, die durch $\mu'(m) = \mu(m)$, $m \in \mathfrak{M}'$ gegeben ist, die durch μ definierte Abbildung.

Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ (kurz: f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$) verstehen wir eine stetige Abbildung $h: B \rightarrow B'$ mit der Eigenschaft

$$(2) \quad \bar{h} \circ p = p' \circ h.$$

Ist insbesondere $X = X'$ und $\bar{h}$ die Identität, dann sprechen wir von f -Abbildungen schlechthin (ohne den Zusatz: zur Abbildung $\bar{h}$).

Eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ bildet also für jedes $x \in X$ die Faser $p^{-1}(x)$ stetig in die Faser $p'^{-1}(h(x))$ ab, im Gegensatz zu einer fasertreuen Abbildung (s. [8], 2.5) jedoch im allgemeinen nicht topologisch.

Definition 2. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung und $\mathfrak{B} \times I = \{B \times I, q, X \times I, Y, G\}$ das Produkt von $\mathfrak{B}$ mit $I = [0, 1]$ (s. [8], 11.1). $q: X \times I \rightarrow X$ sei durch $q(x, t) = x$, $x \in X$, $t \in I$ definiert. Eine f -Abbildung $\mathfrak{h}: \mathfrak{B} \times I \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h} = \bar{h} \circ q$ (s. Def. 1) heißt f -Homotopie zur Abbildung $\bar{h}$.

Ist insbesondere $X = X'$ und $\bar{h}$ die Identität, dann sprechen wir von f -Homotopien schlechthin (ohne den Zusatz: zur Abbildung $\bar{h}$).

Definition 3. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung. Zwei f -Abbildungen $h_k: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$, $k = 0, 1$, zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 1) heißen f -homotop, in Zeichen $h_0 \sim_f h_1$, wenn es eine f -Homotopie $\mathfrak{h}: \mathfrak{B} \times I \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 2) gibt mit

$$\mathfrak{h}(b, 0) = h_0(b), \quad \mathfrak{h}(b, 1) = h_1(b), \quad b \in B.$$

$\mathfrak{h}$ selbst heißt dann auch eine f -Deformation von h_0 in h_1 ; m. a. W.: Bei einer f -Deformation von h_0 in h_1 beschreibt der Bildpunkt von $b \in B$ einen stetig von b abhängenden Weg, der $h_0(b)$ mit $h_1(b)$ verbindet und der ganz in der Faser $p^{-1}(x')$, $x' = \bar{h} \circ p(b)$, verläuft.

S. Folgendes ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 1 bis 3: Sind $\mathfrak{B}_k = \{B_k, p_k, X_k, Y_k, G_k\}$, $k = 1, 2, 3$, Faserräume und h_i und h'_i f -Abbildungen $\mathfrak{B}_i \rightarrow \mathfrak{B}_{i+1}$ zu den Abbildungen $\bar{h}_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$, $i = 1, 2$, dann ist $h_2 \circ h_1$ eine f -Abbildung $\mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_3$ zur Abbildung $\bar{h}_2 \circ \bar{h}_1$, und aus $h_i \sim_f h'_i$ folgt $h_2 \circ h_1 \sim_f h'_2 \circ h'_1$. Die identische Selbstabbildung von $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ ist eine f -Abbildung (zur Identität der Basis).

Bemerkung 2. Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich mit f -Abbildungen resp. f -Homotopien zur Identität der Basis beschäftigen (insbesondere werden also Bild- und Urbildfaserraum die gleiche Basis haben). Diese Beschränkung kann in folgendem Sinne als unwesentlich angesehen werden:

Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung, $\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}') = \{\tilde{B}, \tilde{p}, X, Y', G'\}$ der induzierte Faserraum, $h^0: \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}') \rightarrow \mathfrak{B}'$ die induzierte fasertreue Abbildung (s. [8], § 10) und $h_x^0: \tilde{p}^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(\bar{h}(x))$ die durch h^0 definierte Abbildung⁵⁾.

Wir ordnen jeder f -Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ die f -Abbildung $h': \mathfrak{B} \rightarrow \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ zu, die durch $h'(b) = (h_x^0)^{-1}(h(b))$, $b \in B$, $x = p(b)$ gegeben ist.

Einer f -Abbildung $h': \mathfrak{B} \rightarrow \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ hingegen ordnen wir die f -Abbildung $h^0 \circ h': \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ zu.

Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander und stiften eine eindeutige, f -Homotopien erhaltende Beziehung zwischen den f -Abbildungen $h': \mathfrak{B} \rightarrow \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ und den f -Abbildungen $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$.

Definition 4. Es seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Faserräume über der gleichen Basis. Eine f -Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (s. Def. 1) heißt f -Homotopieäquivalenz, wenn es eine f -Abbildung $h': \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ gibt mit (s. Def. 3)

$$h' \circ h \sim e, \quad h \circ h' \sim e', \quad e, e' \text{ die Identitäten von } \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'.$$

Definition 5. Zwei Faserräume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ über der gleichen Basis heißen f -homotopieäquivalent (oder vom gleichen f -Homotopietyp), wenn es eine f -Homotopieäquivalenz $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (s. Def. 4) gibt.

Wir wollen ein einfaches Kriterium dafür angeben, daß eine f -Abbildung eine f -Homotopieäquivalenz ist. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Betrachtungen einschließlich Hilfssatz 2.

T. Es seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ beliebige, Y, Y' lokal kompakte topologische Räume. Wir bilden die (trivialen) Faserräume $\mathfrak{X} \times Y, \mathfrak{X}' \times Y'$ (Basis $\mathfrak{X}$ resp. $\mathfrak{X}'$). $\pi: \mathfrak{X}' \times Y' \rightarrow Y'$ sei durch $\pi(x', y') = y', x' \in \mathfrak{X}', y' \in Y'$ gegeben. $\bar{\xi}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ sei eine stetige Abbildung.

Ist $\xi: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow \mathfrak{X}' \times Y'$ eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{\xi}$ (s. Def. 1), dann ist $\pi \circ \xi: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow Y'$ stetig, also auch (s. B) die durch $\tilde{\xi}(x) \cdot y = \pi \circ \xi(x, y), x \in \mathfrak{X}, y \in Y$ definierte Abbildung $\tilde{\xi}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y')$.

Es sei umgekehrt $\eta: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y')$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung $(x, y) \rightarrow \eta(x) \cdot y$ von $\mathfrak{X} \times Y$ in Y' ist stetig (s. B), also auch die durch $\eta^*(x, y) = (\bar{\xi}(x), \eta(x) \cdot y)$ definierte Abbildung $\eta^*: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow \mathfrak{X}' \times Y'$. η^* bildet die Faser $x \times Y$ in die Faser $\bar{\xi}(x) \times Y'$ ab, ist also eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{\xi}$ (s. Def. 1).

Es ist $(\tilde{\xi})^*(x, y) = (\bar{\xi}(x), \tilde{\xi}(x) \cdot y) = (\bar{\xi}(x), \pi \circ \xi(x, y)) = \xi(x, y)$, also $(\tilde{\xi})^* = \xi$, ebenso $(\eta^*)^* = \eta$. Die beiden Zuordnungen $\xi \rightarrow \tilde{\xi}$ und $\eta \rightarrow \eta^*$ sind also invers zueinander und stiften somit eine eindeutige Beziehung zwischen den f -Abbildungen $\xi: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow \mathfrak{X}' \times Y'$ zur Abbildung $\bar{\xi}$ und den stetigen Abbildungen $\tilde{\xi}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y')$.

Hilfssatz 2. V sei eine abgeschlossene n -dimensionale Vollkugel ($n > 0$), S ihre Randsphäre. Y, Y' seien lokal kompakte topologische Räume. $V \times Y, V \times Y', S \times Y$, und $S \times Y'$ werden als (triviale) Faserräume über der Basis V resp. S aufgefaßt. Es seien gegeben:

α) Eine f -Abbildung (s. Def. 1) $H: V \times Y \rightarrow V \times Y'$ mit der Eigenschaft: Die durch H definierte Abbildung $h_v: v \times Y \rightarrow v \times Y'$ ⁵⁾ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $v \in V$,

β) eine f -Abbildung $h': S \times Y' \rightarrow S \times Y$,

γ) eine f -Homotopie (s. Def. 2) $\varphi: S \times Y \times I \rightarrow S \times Y, I = [0, 1]$, mit $\varphi(x, y, 0) = h'(H(x, y)), \varphi(x, y, 1) = (x, y), x \in S, y \in Y$.

Dann gibt es eine f -Abbildung $H': V \times Y' \rightarrow V \times Y$ und eine f -Homotopie $\Phi: V \times Y \times I \rightarrow V \times Y$ mit

$$H'(x, y') = h'(x, y'), \quad \Phi(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad \Phi(v, y, 0) = H' \circ H(v, y), \\ \Phi(v, y, 1) = (v, y), \quad x \in S, \quad v \in V, \quad y' \in Y', \quad t \in I.$$

Beweis. Wir übersetzen entsprechend der in T gegebenen eindeutigen Beziehung die Voraussetzungen $\alpha)$ bis $\gamma)$ und die Behauptung des Hilfssatzes 2.

Es seien gegeben die stetigen Abbildungen

$$\tilde{\alpha}) \tilde{H}: V \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y') \text{ mit } \tilde{H}(V) \subset \mathfrak{G}_1(Y, Y') \text{ (s. I),}$$

$$\tilde{\beta}) \tilde{h}': S \rightarrow \mathfrak{G}(Y', Y),$$

$\tilde{\gamma}) \tilde{\varphi}: S \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{h}'(x) \circ \tilde{H}(x)$, $\tilde{\varphi}(x, 1) = e$, $x \in S$, e die Identität von Y .

Dann gibt es stetige Abbildungen $\tilde{H}': V \rightarrow \mathfrak{G}(Y', Y)$ und $\tilde{\Phi}: V \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ mit

$$\tilde{H}'|_S = \tilde{h}', \quad \tilde{\Phi}(v, 0) = \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v), \quad \tilde{\Phi}(v, 1) = e, \quad \tilde{\Phi}|_{S \times I} = \tilde{\varphi}, \quad v \in V.$$

[Die der Abbildung $\bar{\xi}$ in T entsprechenden Abbildungen $\bar{H}$, $\bar{h}'$, $\bar{H}'$ sind gleich der Identität, während $\bar{\Phi}$ und $\bar{\varphi}$ durch $\bar{\Phi}(v, t) = v$, $\bar{\varphi}(x, t) = x$, $v \in V$, $x \in S$, $t \in I$ gegeben sind.]

Es sei x_0 ein fester Punkt aus S . $\tilde{H}(x_0)$ ist eine Homotopieäquivalenz (s. $\tilde{\alpha}$) und $\tilde{h}'(x_0) \circ \tilde{H}(x_0) \simeq e$ (s. $\tilde{\gamma}$), also $\tilde{H}(x_0) \circ \tilde{h}'(x_0) \simeq e$ (s. J). Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{h}' &= \tilde{h}' \oplus e^6 && \text{s. (1)} \\ &\simeq \tilde{h}' \oplus (\tilde{H}(x_0) \oplus \tilde{h}'(x_0)) && \text{s. F} \\ &= (\tilde{h}' \oplus \tilde{H}(x_0)) \oplus \tilde{h}'(x_0) \\ &\simeq (\tilde{h}' \oplus (\tilde{H}|_S)) \oplus \tilde{h}'(x_0) && \text{wegen } \tilde{H}|_S \simeq \tilde{H}(x_0)^6 \text{ und F} \\ &\simeq e \oplus \tilde{h}'(x_0) = \tilde{h}'(x_0) && \text{s. } \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

$\tilde{h}'$ ist also homotop einer konstanten Abbildung, d.h. stetig auf V erweiterbar. Sei

$$(3) \quad \tilde{H}': V \rightarrow \mathfrak{G}(Y', Y), \quad \tilde{H}'|_S = \tilde{h}'$$

eine solche Erweiterung. Ferner sei $S^n = V \times 0 \cup V \times 1 \cup S \times I$ die Rand-sphäre von $V \times I$ und $\tilde{\Phi}: S^n \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ durch

$$(4) \quad \tilde{\Phi}(v, 0) = \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v), \quad \tilde{\Phi}(v, 1) = e, \quad \tilde{\Phi}|_{S \times I} = \tilde{\varphi}, \quad v \in V$$

definiert. Diese Definition ist widerspruchsfrei. Nach $\tilde{\gamma}$ ist nämlich $\tilde{\varphi} \equiv e$ in $S \times 1$, und in $S \times 0$ ist $\tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{h}'(x) \circ \tilde{H}(x) = \tilde{H}'(x) \circ \tilde{H}(x)$, letzteres nach (3).

⁶⁾ Wir verwenden hier wie auch später manchmal dasselbe Zeichen für einen Punkt eines topologischen Raumes und die entsprechende konstante Abbildung in diesen Raum.

$\tilde{\Phi}$ repräsentiert ein gewisses Element α aus $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ [wir denken uns S^n orientiert und nehmen als Bezugspunkte etwa $(x_0, 1)$]. Wir wählen nun eine Abbildung $''\tilde{\Phi}: (S^n, (x_0, 1)) \rightarrow (\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ aus der Homotopieklasse $-\alpha$ derart, daß

$$(5) \quad ''\tilde{\Phi} | S \times I \cup V \times 1 = e^6$$

ist. Das ist immer möglich; sollte $''\tilde{\Phi}$ die Eigenschaft (5) zunächst noch nicht besitzen, so kann dies durch eine einfache Deformation (durch „Konzen-tration“ der Abbildung $''\tilde{\Phi}$ in $V \times 0$) erreicht werden.

Die Abbildung $''\tilde{\Phi} \oplus \tilde{\Phi}$ repräsentiert nach Hilfssatz 1 das Element $\alpha - \alpha = 0$ aus $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, kann also auf $V \times I$ stetig erweitert werden. Es sei

$$(6) \quad \tilde{\Phi}: V \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y), \quad \tilde{\Phi} | S^n = ''\tilde{\Phi} \oplus \tilde{\Phi}$$

eine solche Erweiterung.

Definieren wir $\tilde{H}': V \rightarrow \mathfrak{G}(Y', Y)$ durch

$$(7) \quad \tilde{H}'(v) = ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ \tilde{H}(v), \quad v \in V,$$

dann sind $\tilde{H}'$ und $\tilde{\Phi}$ die gesuchten Abbildungen. Ist nämlich $x \in S$, $v \in V$, so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{H}'(x) &= ''\tilde{\Phi}(x, 0) \circ \tilde{H}(x) && \text{s. (7)} \\ &= \tilde{h}'(x) && \text{s. (5) und (3),} \\ \tilde{\Phi}(v, 0) &= ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ \tilde{\Phi}(v, 0) && \text{s. (6) und (1)} \\ &= ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ \tilde{H}(v) \circ \tilde{H}(v) && \text{s. (4)} \\ &= \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v) && \text{s. (7),} \\ \tilde{\Phi}(v, 1) &= ''\tilde{\Phi}(v, 1) \circ \tilde{\Phi}(v, 1) && \text{s. (6) und (1)} \\ &= e && \text{s. (5) und (4),} \\ \tilde{\Phi} | S \times I &= (''\tilde{\Phi} | S \times I) \circ (''\tilde{\Phi} | S \times I) && \text{s. (6)} \\ &= \tilde{\varphi} && \text{s. (5) und (4).} \end{aligned}$$

Satz 1. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X, Y', G'\}$ Faserräume, Y und Y' lokal kompakt, X ein Polyeder. $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ sei eine f -Abbildung (s. Def. 1) und $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(x)$, $x \in X$, die durch h definierte Abbildung⁵⁾.

h ist genau dann eine f -Homotopieäquivalenz (s. Def. 4), wenn h_x eine Homotopieäquivalenz (s. I) ist für jedes $x \in X$.

Korollar 1. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, Y und Y' lokal kompakt, X ein Polyeder. $\bar{h}: X \rightarrow X'$ sei eine stetige Abbildung, $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 1), und für jedes $x \in X$ sei die durch h definierte Abbildung $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h}(x))$ ⁵⁾ eine Homotopieäquivalenz (s. I).

Dann sind $\mathfrak{B}$ und der induzierte Faserraum $\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ (s. [8], § 10) f -homotopieäquivalent (s. Def. 5).

Korollar 1 folgt aus Satz 1 auf Grund der Bemerkung 2, S. 117.

Korollar 2. Ein Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$, X ein Polyeder, Y lokal kompakt, ist genau dann dem Produkt $X \times Y$ f -homotopieäquivalent (s. Def. 5), wenn es eine stetige Abbildung $h: B \rightarrow Y$ gibt derart, daß $h|p^{-1}(x)$ eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $x \in X$.

Zu Korollar 2. $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ sei durch $\pi(x, y) = y$, $x \in X$, $y \in Y$ definiert.

$H: \mathfrak{B} \rightarrow X \times Y$ sei eine f -Homotopieäquivalenz. Dann ist $h = \pi \circ H$ eine stetige Abbildung von B in Y . Die durch H definierte Abbildung $H_x: p^{-1}(x) \rightarrow x \times Y$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$ (s. Satz 1), also auch $h|p^{-1}(x) = (\pi| x \times Y) \circ H_x$, denn $\pi| x \times Y$ ist ein Homöomorphismus.

Umgekehrt sei $h: B \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $h|p^{-1}(x)$ eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$. Dann ist durch $b \rightarrow (p(b), h(b))$, $b \in B$ eine f -Abbildung $H: \mathfrak{B} \rightarrow X \times Y$ gegeben, und die durch H definierte Abbildung $H_x: p^{-1}(x) \rightarrow x \times Y$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$. H ist also eine f -Homotopieäquivalenz (s. Satz 1).

Korollar 3. Es sei X ein Polyeder, Y ein lokal kompakter topologischer Raum. Die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $X \rightarrow \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) bilden eine Gruppe bezüglich der $\oplus$ -Multiplikation (s. F).

Zu Korollar 3. Die Assoziativität der $\oplus$ -Multiplikation folgt unmittelbar aus ihrer Definition. Die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $x \rightarrow e$ (= Identität von Y) ist Einselement. Es bleibt die Existenz des Links-inversen nachzuweisen.

$\tilde{h}: X \rightarrow \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ sei eine stetige Abbildung. Durch $(x, y) \rightarrow (x, \tilde{h}(x) \cdot y)$, $x \in X$, $y \in Y$ definieren wir eine f -Selbstabbildung h von $X \times Y$ (s. T). $\tilde{h}(x)$ ist eine Homotopieäquivalenz, also auch die durch h definierte Abbildung von $x \times Y$ in sich⁵⁾. h selbst ist also nach Satz 1 eine f -Homotopieäquivalenz. Wir wählen (s. Def. 4) eine f -Abbildung $h': X \times Y \rightarrow X \times Y$ und eine f -Deformation $\varphi: X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$ von $h' \circ h$ in die Identität von $X \times Y$. Die in T hergestellte eindeutige Beziehung liefert dann eine stetige Abbildung $\tilde{h}': X \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ und eine Deformation $\tilde{\varphi}: X \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ von $\tilde{h}' \circ \tilde{h}$ in die konstante Abbildung $x \rightarrow e$, $x \in X$. Wegen $\tilde{h}(x) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ und $\tilde{h}'(x) \circ \tilde{h}(x) \simeq e$ ist $\tilde{h}'(x) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. J), wegen $\tilde{\varphi}(x, t) \simeq \tilde{\varphi}(x, 1) = e$ ist $\tilde{\varphi}(x, t) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. J). $\tilde{h}'$ ist also eine Abbildung von X in $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ und die Homotopieklasse von $\tilde{h}'$ ist linksinvers zu der von $\tilde{h}$.

Beweis des Satzes 1. Es sei h eine f -Homotopieäquivalenz. Aus Definition 4 und aus I folgt, daß dann h_x für jedes $x \in X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Umgekehrt sei jetzt h_x eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$.

1. Es bezeichne X_n , $n = 0, 1, \dots$ das n -dimensionale Gerüst einer festen Zellenzerlegung von X , $h_n: \mathfrak{B}|X_n \rightarrow \mathfrak{B}'|X_n$ (s. R) die durch h definierte f -Abbildung⁵⁾. Wir konstruieren für jedes $n \geq 0$ eine f -Abbildung $h'_n: \mathfrak{B}'|X_n \rightarrow \mathfrak{B}|X_n$ und eine f -Deformation φ_n von $h'_n \circ h_n$ in die Identität von $\mathfrak{B}|X_n$ derart, daß $h'_n(b') = h'_{n-1}(b')$ und $\varphi_n(b, t) = \varphi_{n-1}(b, t)$ ist für $b \in p^{-1}(X_{n-1})$, $b' \in p'^{-1}(X_{n-1})$,

$t \in I$. Die f -Abbildungen h'_n setzen sich dann zu einer f -Abbildung $h': \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ zusammen, die f -Deformationen φ_n zu einer f -Deformation φ von $h' \circ h$ in die Identität von $\mathfrak{B}$.

Um den Fall $n=0$ zu erledigen, nehmen wir für jede Ecke $x \in X$ ein Homotopieinverses h'_x von h_x (s. I) und eine Deformation von $h'_x \circ h_x$ in die Identität von $p^{-1}(x)$. h'_0 resp. φ_0 ist dann einfach die Gesamtheit dieser Abbildungen resp. Deformationen.

Wir nehmen nun an (Induktionsvoraussetzung), h'_{n-1} und φ_{n-1} ($n \geq 1$) seien bereits konstruiert. V sei eine n -Zelle von X_n , S ihr Rand. Da V in einen Punkt zusammenziehbar ist, kann $\mathfrak{B}|V$ (s. R) resp. $\mathfrak{B}'|V$ als das Produkt $V \times Y$ resp. $V \times Y'$ aufgefaßt werden (s. [8], 11.6). Durch h_n , h'_{n-1} und φ_{n-1} werden dann f -Abbildungen $h_V: V \times Y \rightarrow V \times Y'$, $h'_S: S \times Y' \rightarrow S \times Y$ und eine f -Deformation $\varphi_S: S \times Y \times I \rightarrow S \times Y$ definiert⁵⁾, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügen. Es gibt also eine f -Abbildung $h'_V: V \times Y' \rightarrow V \times Y$ und eine f -Deformation φ_V von $h'_V \circ h_V$ in die Identität von $V \times Y$ mit $h'_V(x, y') = h'_S(x, y')$ und $\varphi_V(x, y, t) = \varphi_S(x, y, t)$, $x \in S$, $y \in Y$, $y' \in Y'$, $t \in I$.

Wir schreiben jetzt wieder $\mathfrak{B}|V$ resp. $\mathfrak{B}'|V$ statt $V \times Y$ resp. $V \times Y'$. Dann lautet das Ergebnis: Es gibt eine f -Abbildung $h'_V: \mathfrak{B}'|V \rightarrow \mathfrak{B}|V$ und eine f -Deformation φ_V von $h'_V \circ h_V$ ($h_V: \mathfrak{B}|V \rightarrow \mathfrak{B}'|V$ die durch h definierte f -Abbildung⁵⁾) in die Identität von $\mathfrak{B}|V$ mit $h'_V(b') = h'_{n-1}(b')$ und $\varphi_V(b, t) = \varphi_{n-1}(b, t)$ für $b \in p^{-1}(S)$, $b' \in p'^{-1}(S)$, $t \in I$.

Wir wählen für jede n -Zelle V ein solches Paar h'_V , φ_V und erklären h'_n und φ_n durch $h'_n(b') = h'_V(b')$, $\varphi_n(b, t) = \varphi_V(b, t)$ für $b \in p^{-1}(V)$, $b' \in p'^{-1}(V)$, $t \in I$.

2. $h'_x: p'^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(x)$, $x \in X$ sei die durch h' definierte Abbildung. Nach Konstruktion von h' ist $h'_x \circ h_x$ in die Identität von $p^{-1}(x)$ deformierbar. h'_x ist also eine Homotopieäquivalenz (s. J). Wir können demnach auf h' den im ersten Teil dieses Beweises durchgeführten Schluß anwenden und erhalten eine f -Abbildung $h'': \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ mit $h'' \circ h' \sim_f e'$ (= Identität von $\mathfrak{B}'$). Dann ist aber $h'' \sim_f h'' \circ (h' \circ h) = (h'' \circ h') \circ h \sim_f h$, also $h \circ h' \sim_f e'$. Satz 1 ist damit bewiesen.

Bemerkung 3. Die Voraussetzungen des Satzes 1 lassen sich abschwächen. Es genügt z. B. anzunehmen, daß X ein CW-Komplex ist im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD ([11], S. 223); der Beweis wird dadurch nicht wesentlich komplizierter. Auch auf die Eigenschaft von Y , lokal kompakt zu sein, kann man verzichten, allerdings nicht, ohne den Beweis erheblich zu ändern. Schließlich läßt sich die Voraussetzung über die Abbildungen h_x mit Hilfe des unten folgenden Satzes 2 reduzieren.

Dagegen wird der Satz 1 falsch, wenn man über X keinerlei einschränkende Voraussetzungen macht. Wir geben als Beispiel⁷⁾ eine f -Selbstabbildung h eines Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ mit lokal kompakter Faser Y an, die keine f -Homotopieäquivalenz ist, obwohl für jedes $x \in X$ durch h ein Homöomorphismus $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(x)$ definiert wird⁵⁾.

⁷⁾ Das angeführte Beispiel findet sich in anderem Zusammenhang bei ARENS [1], S. 601.

X und Y sind Teilräume der reellen Zahlengeraden. X besteht aus den Punkten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ und 0 , Y aus den Punkten $0, 1, 2, \dots$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Die Gruppe G besteht nur aus der Identität von Y , $\mathfrak{B}$ ist also das Produkt $X \times Y$, p die Projektion auf den Faktor X .

Für $k=1, 2, 3, \dots, \infty$, $m=0, 1, 2, \dots$ sei

$$h\left(\frac{1}{k}, m\right)^8 = \begin{cases} \left(\frac{1}{k}, m\right) & \text{für } m < k^9 \\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) & \text{für } m = k \neq 1 \\ \left(\frac{1}{k}, m-1\right) & \text{für } m > k \end{cases}$$

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) & \text{für } 0 < m < k \\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m+1}\right) & \text{für } m \geq k \end{cases}$$

h ist stetig. $(0, 0)$ ist die einzige Stelle, an der dies fraglich scheinen könnte. Wenn aber $x \in X$ und $y \in Y$ gegen 0 konvergieren, dann konvergiert $h(x, y)$ gegen $(0, 0) = h(0, 0)$. h ist also eine f -Abbildung. Die durch h definierte Abbildung $h_x: x \times Y \rightarrow x \times Y$ ist ein Homöomorphismus für jedes $x \in X$.

Wäre h eine f -Homotopieäquivalenz, dann gäbe es (s. Def. 4) eine f -Selbstabbildung h' von $X \times Y$ mit $h \circ h' \sim e$ und $h' \circ h \sim e$ (e = Identität von $X \times Y$). In $X \times Y$ sind aber keine zwei verschiedenen Punkte durch einen Weg verbindbar. Bei einer Deformation kann sich also eine stetige Abbildung in $X \times Y$ nicht ändern. Es müßte also $h \circ h' = e$ und $h' \circ h = e$ sein, d. h. h ein Homöomorphismus und $h' = h^{-1}$. Nun ist zwar h eineindeutig, aber h^{-1} an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig. Durchläuft nämlich k die Folge $1, 2, 3, \dots$, so konvergiert $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ gegen $(0, 0)$ aber $h^{-1}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k}, k\right)$ nicht gegen $h^{-1}(0, 0) = (0, 0)$.

Als Ergänzung zu Satz 1 beweisen wir den

Satz 2. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, X bogenweise zusammenhängend. $\bar{h}: X \rightarrow X'$ sei eine stetige Abbildung, $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 1) und $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h}(x))$, $x \in X$, die durch h definierte Abbildung⁵⁾. Für ein gewisses $\bar{x} \in X$ sei $h_{\bar{x}}$ eine Homotopieäquivalenz.

Dann ist h_x für jedes $x \in X$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Es sei x ein beliebiger Punkt aus X . $C: I \rightarrow X$, $C(0) = \bar{x}$, $C(1) = x$ sei ein Weg von $\bar{x}$ nach x und $\mathfrak{C}_t: p^{-1}(\bar{x}) \rightarrow p^{-1}(C(t))$ resp. $\mathfrak{C}'_t: p'^{-1}(\bar{h}(\bar{x})) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h} \circ C(t))$, $t \in I$ eine Verschiebung von $p^{-1}(\bar{x})$ resp. $p'^{-1}(\bar{h}(\bar{x}))$ längs C resp. $\bar{h} \circ C$ (s. [8], 13.1).

Durch $(\mathfrak{C}'_t)^{-1} \circ h_{C(t)} \circ \mathfrak{C}_t$, $0 \leq t \leq 1$ ist eine Deformation von $h_{\bar{x}}$ in $(\mathfrak{C}'_1)^{-1} \circ h_x \circ \mathfrak{C}_1$ gegeben. Nach Voraussetzung ist $h_{\bar{x}}$ eine Homotopieäquivalenz, also auch $(\mathfrak{C}'_1)^{-1} \circ h_x \circ \mathfrak{C}_1$ (s. J) und damit h_x (denn $\mathfrak{C}'_1$ und $\mathfrak{C}_1$ sind Homöomorphismen).

⁵⁾ Wir vereinbaren: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\infty > m$.

Bemerkung 4. Der Begriff der f -Homotopieäquivalenz wurde neuerdings auch von M. L. CURTIS (Ann. of Math. **60**, 304) untersucht. Daneben führte CURTIS den Begriff der a -Abbildung und der a -Äquivalenz von Faserräumen ein. Eine a -Abbildung ist eine f -Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (Bezeichnungen s. Def. 1) mit der Eigenschaft: Die durch h definierte Abbildung $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h}(x))$ induziert in allen Homotopiegruppen Isomorphismen auf. Wenn die Fasern CW-Komplexe sind, so ist dies gleichbedeutend damit, daß h_x eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $x \in X$ (s. [11], Theorem 1, S. 215). Eine a -Abbildung h zur Identität der Basis (d.h. $p = p' \circ h$) ist dann also nach Satz 1 eine f -Homotopieäquivalenz (zumindest wenn X ein Polyeder ist). Da nach CURTIS zwei Faserräume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ über der gleichen Basis a -äquivalent heißen, wenn es a -Abbildungen $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ und $h': \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ zur Identität der Basis gibt, folgt hieraus insbesondere:

Sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Faserräume (im Sinne von STEENROD [8]; bei CURTIS werden allgemeinere Faserräume zugelassen) mit CW-Komplexen als Fasern und einem Polyeder als gemeinsamer Basis und sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ a -äquivalent, dann sind sie sogar f -homotopieäquivalent (A -äquivalent bei CURTIS).

§ 3. Faserräume über Sphären.

U. Es sei G eine topologische Transformationsgruppe des lokal kompakten topologischen Raumes Y . Das bedeutet: G ist eine topologische Gruppe von Homöomorphismen von Y auf sich, und die Abbildung $\eta: G \times Y \rightarrow Y$, die dem Paar (g, y) , $g \in G$, $y \in Y$ das Bild von y bei g zuordnet ($\eta(g, y) = g \cdot y$), ist stetig (vgl. [8], 2.2).

Die Elemente von G sind Homöomorphismen, also insbesondere stetige Abbildungen. Indem wir so die Elemente von G als Elemente von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A) auffassen, erhalten wir die „Injektion“ $j: G \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$. Aus der Stetigkeit von η folgt nach B die Stetigkeit von j . j induziert daher einen Homomorphismus $j^*: \pi_n(G, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, e die Identität von Y , $n \geq 0$.

Wir beschreiben den Homomorphismus j^* für den Fall $n=0$ (für $n > 0$ s. [8], 15.5):

Ist $g \in G$, so bezeichnet $\bar{g}$ die Bogenkomponente von g in G , $\bar{j}(\bar{g})$ die Bogenkomponente von $j(g)$ in $\mathfrak{G}(Y, Y)$. Wegen der Stetigkeit von j ist $j(\bar{g}) \subset \bar{j}(\bar{g})$. Da die Elemente von G Homöomorphismen sind, ist $j(G) \subset \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I), also $\bar{j}(\bar{g}) \in \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. L). Die Elemente von $\pi_0(G, e)$ sind die Bogenkomponenten von G (s. [8], 16.10) und $j^*: \pi_0(G, e) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ ist durch $j^*(\bar{g}) = \bar{j}(\bar{g})$, $g \in G$ gegeben. Es ist leicht einzusehen, daß die so definierte Abbildung j^* ein Homomorphismus ist.

V. $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ sei ein Faserraum über der m -Sphäre S^m , $m > 0$. E_1 resp. E_2 sei die „obere“ resp. „untere“ abgeschlossene Hemisphäre von S^m . $S^{m-1} = E_1 \cap E_2$ der „Äquator“, x_0 ein fester Punkt aus S^{m-1} .

Da E_k , $k=1, 2$, in einen Punkt zusammenziehbar ist, gibt es fasertreue Abbildungen $\Phi_k: E_k \times Y \rightarrow \mathfrak{B}|E_k$ (s. [8], 11.6). Für $x \in S^{m-1}$, $y \in Y$ ist $\Phi_1^{-1}(\Phi_2(x, y)) = (x, g_x \cdot y)$, $g_x \in G$, und durch $T(x) = g_x$ ist eine stetige Ab

bildung $T: S^{m-1} \rightarrow G$ gegeben. Ist $T(x_0) = e$ (das kann durch geeignete Wahl von Φ_1 stets erreicht werden), dann heißt T eine *charakteristische Abbildung* von $\mathfrak{B}$.

Jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ kommt als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, \phi, S^m, Y, G\}$ vor (s. [8], 18.2).

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, \phi_i, S^m, Y, G\}$, $i = 1, 2$, mit den charakteristischen Abbildungen T_i sind genau dann äquivalent, wenn es ein $a \in G$ gibt, für welches die Abbildungen $x \rightarrow T_2(x)$ und $x \rightarrow a T_1(x) a^{-1}$ von S^{m-1} in G homotop sind (s. [8], 18.3). Wir beweisen den analogen

Satz 3. *Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, \phi_i, S^m, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, Faserräume über der m -Sphäre S^m , $m > 0$, Y_i lokal kompakt und $T_i: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G_i, e_i)$ (e_i die Identität von Y_i) charakteristische Abbildungen von $\mathfrak{B}_i$ (s. V). j_i bezeichne die „Injektion“ von G_i in $\mathfrak{G}(Y_i, Y_i)$ (s. U).*

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann f -homotopieäquivalent (s. Def. 5), wenn es ein Element $g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (s. I) gibt, für welches die Abbildungen $x \rightarrow j_2 \circ T_2(x)$ und $x \rightarrow g \circ (j_1 \circ T_1(x)) \circ g^{-1}$ von S^{m-1} in $\mathfrak{G}(Y_2, Y_2)$ homotop sind (g^{-1} ein Homotopieinverses von g ; s. I).

Korollar. *Y sei ein lokal kompakter topologischer Raum. $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ bezeichne die Ordnung der Gruppe $\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $m > 0$, (s. G und L).*

Es gibt höchstens $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht f -homotopieäquivalente (s. Def. 5) Faserräume mit Basis S^m (= m -Sphäre) und Faser Y .

Beweis des Korollars. ($\mathfrak{B}_\lambda = \{B_\lambda, \phi_\lambda, S^m, Y, G_\lambda\}$), $\lambda \in A$ sei eine Familie von Faserräumen, $j_\lambda: G_\lambda \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ bezeichne die „Injektion“ (s. U).

Sei $T_\lambda: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G_\lambda, e)$ eine charakteristische Abbildung von $\mathfrak{B}_\lambda$ (s. V). Aus $j_{\lambda_1} \circ T_{\lambda_1} \simeq j_{\lambda_2} \circ T_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in A$) folgt nach Satz 3, daß $\mathfrak{B}_{\lambda_1}$ und $\mathfrak{B}_{\lambda_2}$ f -homotopieäquivalent sind. Es gibt also höchstens $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht f -homotopieäquivalente Faserräume in der Familie $(\mathfrak{B}_\lambda)$. Der letzte Schluß ist auch für $m = 1$ richtig: Aus der Definition von $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. L) folgt leicht, daß es höchstens $[\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht homotop Abbildungen $(S^0, x_0) \rightarrow (\mathfrak{G}_1(Y, Y), e)$ gibt.

Beweis des Satzes 3. Es seien $\Phi_k^i: E_k \times Y_i \rightarrow \mathfrak{B}_i|E_k$, $i, k = 1, 2$, faserentreue Abbildungen mit (s. V)

$$(8) \quad (\Phi_1^i)^{-1}(\Phi_2^i(x, y_i)) = (x, T_i(x) \cdot y_i) = (x, j_i \circ T_i(x) \cdot y_i), \quad x \in S^{m-1}, \quad y_i \in Y_i.$$

1. Es sei $h: \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$ eine f -Homotopieäquivalenz. $h_k: \mathfrak{B}_1|E_k \rightarrow \mathfrak{B}_2|E_k$ sei die durch h definierte f -Abbildung⁵⁾. Dann ist $g_k = (\Phi_k^2)^{-1} \circ h_k \circ \Phi_k^1$ eine f -Abbildung von $E_k \times Y_1$ in $E_k \times Y_2$ und es ist

$$(9) \quad h_k = \Phi_k^2 \circ g_k \circ (\Phi_k^1)^{-1}.$$

Da h_1 und h_2 auf $\mathfrak{B}_1|S^{m-1}$ übereinstimmen, ergibt sich aus (9)

$$(10) \quad \Phi_1^2 \circ g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(b) = \Phi_2^2 \circ g_2 \circ (\Phi_2^1)^{-1}(b), \quad b \in \phi_1^{-1}(S^{m-1})$$

oder

$$(11) \quad g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(\Phi_2^1(x, y_1)) = (\Phi_1^2)^{-1}(\Phi_2^2 \circ g_2(x, y_1)), \quad x \in S^{m-1}, \quad y_1 \in Y_1.$$

Wir definieren $\pi_k: E_k \times Y_2 \rightarrow Y_2$ durch $\pi_k(v, y_2) = y_2$, $y_2 \in Y_2$ und $\tilde{g}_k: E_k \rightarrow \mathfrak{G}(Y_1, Y_2)$ durch $\tilde{g}_k(v) \cdot y_1 = \pi_k \circ g_k(v, y_1)$, $v \in E_k$, $y_1 \in Y_1$. Nach B ist $\tilde{g}_k$ stetig, und es ist

$$(12) \quad g_k(v, y_1) = (v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1), \quad v \in E_k, \quad y_1 \in Y_1.$$

Damit wird die rechte Seite von (11) zu $(\Phi_1^2)^{-1}(\Phi_2^2(x, \tilde{g}_2(x) \cdot y_1))$ und die nach (8) zu $(x, (j_2 \circ T_2(x)) \circ \tilde{g}_2(x) \cdot y_1)$. Die linke Seite von (11) wird bei entsprechender Behandlung zu $(x, \tilde{g}_1(x) \circ (j_1 \circ T_1(x)) \cdot y_1)$. Es ist also

$$(13) \quad \tilde{g}_1(x) \circ (j_1 \circ T_1(x)) = (j_2 \circ T_2(x)) \circ \tilde{g}_2(x), \quad x \in S^{m-1}$$

oder (s. E)

$$(14) \quad (\tilde{g}_1|S^{m-1}) \circ (j_1 \circ T_1) = (j_2 \circ T_2) \circ (\tilde{g}_2|S^{m-1}).$$

Nun ist $\tilde{g}_k$ auf ganz E_k definiert, also $\tilde{g}_k|S^{m-1}$ in die konstante Abbildung $\tilde{g}_k(x_0)^6$ deformierbar, also (s. F)

$$(15) \quad \tilde{g}_1(x_0) \circ (j_1 \circ T_1) \simeq (j_2 \circ T_2) \circ \tilde{g}_2(x_0) = (j_2 \circ T_2) \circ \tilde{g}_1(x_0).$$

Bei der letzten Gleichung haben wir $\tilde{g}_1(x_0) = \tilde{g}_2(x_0)$ benutzt; dies ergibt sich aus (13) wegen $j_i \circ T_i(x_0) = e_i$.

h ist nach Voraussetzung eine f -Homotopieäquivalenz, also auch h_k und damit $g_k = (\Phi_k^2)^{-1} \circ h_k \circ \Phi_k^1$. Die durch g_k definierte Abbildung $v \times Y_1 \rightarrow v \times Y_2$, $v \in E_k$, führt (v, y_1) in $(v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1)$ über [s. (12)] und ist nach Satz 1 eine Homotopieäquivalenz, d.h. $\tilde{g}_k(v) \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (s. I). Es sei g^- ein Homotopieinverses (s. I) von $g = \tilde{g}_1(x_0)$. Dann folgt aus (15)

$$g \circ (j_1 \circ T_1) \circ g^- \simeq j_2 \circ T_2.$$

2. Es sei umgekehrt $g \circ (j_1 \circ T_1) \circ g^- \simeq j_2 \circ T_2^6$ für geeignetes $g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (g^- ein Homotopieinverses von g).

Wir multiplizieren diese Homotopierelation von links mit $(j_2 \circ T_2^{-1})^9$, von rechts mit g und erhalten (s. F)

$$(j_2 \circ T_2^{-1}) \circ g \circ (j_1 \circ T_1) \simeq g^6.$$

Die Abbildung auf der linken Seite dieser Relation ist also homotop einer konstanten Abbildung, d.h. stetig auf E_2 erweiterbar. Wir wählen eine solche Erweiterung $\tilde{g}_2: E_2 \rightarrow \mathfrak{G}(Y_1, Y_2)$ und bezeichnen mit $\tilde{g}_1: E_1 \rightarrow \mathfrak{G}(Y_1, Y_2)$ die konstante Abbildung $\tilde{g}_1(E_1) = g$. Dann gilt:

$$(16) \quad \begin{aligned} \tilde{g}_2|S^{m-1} &= (j_2 \circ T_2^{-1}) \circ (\tilde{g}_1|S^{m-1}) \circ (j_1 \circ T_1) \quad \text{oder} \\ (\tilde{g}_1|S^{m-1}) &(j_1 \circ T_1) = (j_2 \circ T_2) \circ (\tilde{g}_2|S^{m-1}). \end{aligned}$$

Wir definieren eine f -Abbildung $g_k: E_k \times Y_1 \rightarrow E_k \times Y_2$ durch

$$(17) \quad g_k(v, y_1) = (v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1), \quad v \in E_k, \quad y_1 \in Y_1.$$

(Zur Stetigkeit von g_k vgl. B.)

⁹⁾ T_2^{-1} ist die Abbildung $x \rightarrow (T_2(x))^{-1}$ von S^{m-1} in G_2 .

Die Formeln (16) und (17) stimmen mit (14) und (12) überein. Wir können die Rechnung, die von (10) über (12) zu (14) geführt hat, rückwärts verfolgen und erhalten:

$$\Phi_1^2 \circ g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(b) = \Phi_2^2 \circ g_2 \circ (\Phi_2^1)^{-1}(b), \quad b \in p_1^{-1}(S^{m-1}).$$

Die beiden f -Abbildungen $\Phi_k^2 \circ g_k \circ (\Phi_k^1)^{-1}: \mathfrak{B}_1|E_k \rightarrow \mathfrak{B}_2|E_k$, $k=1, 2$, stimmen also auf $\mathfrak{B}_1|S^{m-1}$ überein und setzen sich daher zu einer f -Abbildung $h: \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$ zusammen.

h ist eine f -Homotopieäquivalenz. Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die durch h definierte Abbildung $h_v: p_1^{-1}(v) \rightarrow p_2^{-1}(v)$ eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $v \in S^m$. Das ist nach Satz 2 der Fall, wenn h_{x_0} eine Homotopieäquivalenz ist. Da Φ_1^1 die Faser $x_0 \times Y_1$ homöomorph auf $p_1^{-1}(x_0)$ abbildet, genügt es zu zeigen, daß die durch g_1 definierte Abbildung $x_0 \times Y_1 \rightarrow x_0 \times Y_2$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies folgt wegen (17) aus $\tilde{g}_1(x_0) = g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$.

W. Es sei Y ein lokal kompakter topologischer Raum, $\mathfrak{G}(Y, Y)$ der Raum der stetigen Selbstabbildungen von Y (s. A).

Zwei Elemente α_1 und α_2 von $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $n \geq 0$, heißen *äquivalent bezüglich der Operatorengruppe* $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. Q), wenn es einen Operator $\gamma \in \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ gibt, der α_1 in α_2 überführt (γ^{-1} führt dann α_2 in α_1 über; die Definition ist also symmetrisch).

Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y, G\}$, $i=1, 2$, Faserräume mit den charakteristischen Abbildungen $T_i: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ (s. V). $j: G \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ bezeichne die „Injektion“ (s. U). Nach Satz 3 sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ genau dann f -homotopieäquivalent, wenn es ein $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ gibt, für welches die Abbildungen $x \rightarrow j \circ T_2(x)$ und $x \rightarrow g \circ (j \circ T_1(x)) \circ g^{-}$ von S^{m-1} in $\mathfrak{G}(Y, Y)$ homotop sind (g^{-} ein Homotopieinverses von g). Dies bedeutet aber gerade, daß die durch $j \circ T_1$ und $j \circ T_2$ repräsentierten Elemente von $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ äquivalent sind bezüglich $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$. Da nach [8], 18.2 jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ vorkommt, ergibt sich hieraus der

Satz 4. Y sei ein lokal kompakter Raum, G eine topologische Transformationsgruppe von Y (s. U). Es bezeichne $\mathfrak{G}(Y, Y)$ den Raum der stetigen Selbstabbildungen von Y (s. A), $j: G \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ die „Injektion“, $j^*: \pi_n(G, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $n \geq 0$, den durch j induzierten Homomorphismus (s. U) und S^m , $m > 0$, die m -Sphäre.

Die Klassen f -homotopieäquivalenter (s. Def. 5) Faserräume mit Basis S^m , Faser Y und Strukturgruppe G stehen in eindeutiger Beziehung zu den Klassen von Elementen von $j^*(\pi_{m-1}(G, e))$, die bezüglich $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ äquivalent sind (s. W). Man erhält eine solche Beziehung, wenn man jedem $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ das durch $j \circ T$ ($T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ eine charakteristische Abbildung von $\mathfrak{B}$; s. V) repräsentierte Element von $j^*(\pi_{m-1}(G, e))$ zuordnet.

Wir betrachten im folgenden Faserräume über der m -Sphäre S^m mit einer n -Sphäre als Faser ($m > 0, n > 0$). Dabei setzen wir zur Abkürzung $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A); e bezeichnet die identische Selbstabbildung von S^n .

Hilfssatz 3. Es sei $y_0 \in S^n$ ein fester Punkt. Durch $p(g) = g \cdot y_0$, $g \in \mathfrak{G}^n$ ist eine stetige Abbildung $p: \mathfrak{G}^n \rightarrow S^n$ gegeben. p ist Projektion eines Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ mit der Faser $G^n = p^{-1}(y_0)$ und der orthogonalen Gruppe in n -Variablen als Strukturgruppe.

Beweis. Die Identität von $\mathfrak{G}^n$ ist stetig. Nach B ist also die Abbildung $(g, y) \rightarrow g \cdot y$ von $\mathfrak{G}^n \times S^n$ in S^n stetig, also erst recht die Abbildung p .

Es sei O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n , $j: O_{n+1} \rightarrow \mathfrak{G}^n$ die „Injektion“ (s. U). Die Abbildung $p \circ j$ ist Projektion eines Faserraumes $\{O_{n+1}, p \circ j, S^n, O_n, O_n\}$ mit Faser und Gruppe $O_n = (p \circ j)^{-1}(y_0)$ (s. [8], 7.6). Es gibt also ein System offener Mengen $V_k \subset S^n$ und stetiger Abbildungen $\varphi_k: V_k \rightarrow O_{n+1}$ mit $\bigcup_k V_k = S^n$ und $x = (p \circ j)(\varphi_k(x)) = (j \circ \varphi_k(x)) \cdot y_0$, $x \in V_k$ (d. s. lokale Schnittflächen in O_{n+1}).

Wir machen O_n zur topologischen Transformationengruppe von G^n (s. U), indem wir die Elemente r von O_n als „Linksverschiebungen“ von G^n auffassen: $r \cdot g = j(r) \circ g$, $g \in G^n$. Wir müssen nachweisen, daß $r \cdot g$ stetig ist in beiden Variablen. Das ist aber der Fall, weil j und die $\circ$ -Multiplikation stetig sind (s. D).

Wir definieren nun $\Phi_k: V_k \times G^n \rightarrow p^{-1}(V_k)$ durch $\Phi_k(x, g) = (j \circ \varphi_k(x)) \circ g$, $x \in V_k$, $g \in G^n$. Φ_k ist stetig, weil j , φ_k und die $\circ$ -Multiplikation stetig sind. Entsprechend ist die durch $\Phi_k^-(b) = (p(b), (j \circ \varphi_k^{-1}(p(b))) \circ b)^{10}$, $b \in p^{-1}(V_k)$, definierte Abbildung $\Phi_k^-: p^{-1}(V_k) \rightarrow V_k \times G^n$ stetig.

Für $x \in V_k$, $g \in G^n$ ist

$$p \circ \Phi_k(x, g) = p((j \circ \varphi_k(x)) \circ g) = (j \circ \varphi_k(x)) \circ g \cdot y_0 = x,$$

und daher für $x \in V_k \cap V_{k'}$, $g \in G^n$:

$$\Phi_i^-(\Phi_k(x, g)) = (x, (j \circ \varphi_i^{-1}(x)) \circ (j \circ \varphi_k(x)) \circ g) = (x, (j(\varphi_i^{-1}(x) \varphi_k(x))) \circ g).$$

Daraus geht hervor

1. $\Phi_k^- \circ \Phi_k(x, g) = (x, g)$, $x \in V_k$, $g \in G^n$. Man beweist entsprechend: $\Phi_k \circ \Phi_k^-(b) = b$, $b \in p^{-1}(V_k)$. Φ_k ist also ein Homöomorphismus, $\Phi_k^- = \Phi_k^{-1}$.

2. Für $x \in V_i \cap V_k$, $g \in G^n$ ist $\Phi_i^{-1}(\Phi_k(x, g)) = (x, g_{ik}(x) \cdot g)$, $g_{ik}(x) = \varphi_i^{-1}(x) \varphi_k(x) \in O_n$, und $g_{ik}(x)$ hängt stetig von x ab.

Durch $\mathfrak{G}^n$, S^n , p , G^n , O_n , V_k , Φ_k ist also ein „Koordinatenbündel“ (s. [8], 2.3) eines Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ gegeben, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Wir betrachten die Homotopiefolge des Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ (s. [8], § 17):

$$(18) \quad \rightarrow \pi_{m+1}(S^n, y_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_m(G^n, e) \xrightarrow{i^*} \pi_m(\mathfrak{G}^n, e) \xrightarrow{p^*} \pi_m(S^n, y_0) \rightarrow, m > 0.$$

(Wir hätten uns zur Herleitung dieser Folge auch auf das allgemeine Theorem 4 in [3] berufen können.)

Die Folge (18) ist exakt, also

$$\pi_m(\mathfrak{G}^n, e) / i^*(\pi_m(G^n, e)) \approx p^*(\pi_m(S^n, y_0)).$$

¹⁰ φ_k^{-1} ist die Abbildung $x \rightarrow (\varphi_k(x))^{-1}$ von V_k in O_{n+1} .

Bezeichnen wir allgemein die Ordnung einer Gruppe π mit $[\pi]$, so folgt hieraus

$$(19) \quad \begin{cases} [\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)] = [i^*(\pi_m(G^n, e))] \cdot [p^*(\pi_m(\mathfrak{G}^n, e))] \\ \leq [\pi_m(G^n, e)] \cdot [\pi_m(S^n, y_0)], \quad m > 0. \end{cases}$$

G_1^n sei der Teilraum von G^n , der aus den stetigen Abbildungen vom Grade 1 besteht. Eine Selbstabbildung von S^n vom Grade 1, die den Punkt y_0 festläßt, kann so in die Identität von S^n deformiert werden, daß der Bildpunkt von y_0 während der ganzen Deformation fest bleibt; m. a. W. G_1^n ist die Bogenkomponente von e in G^n (s. C.). Wir können daher $\pi_m(G^n, e)$ und $\pi_m(G_1^n, e)$, $m > 0$, in natürlicher Weise identifizieren. Nach [10], 2.10 läßt sich ein Isomorphismus $I_1: \pi_m(G_1^n, e) \rightarrow \pi_{m+n}(S^n, y_0)$ angeben. Auf Grund der Identifikation $\pi_m(G^n, e) = \pi_m(G_1^n, e)$ wird hieraus

$$(20) \quad I_1: \pi_m(G^n, e) \approx \pi_{m+n}(S^n, y_0), \quad m, n > 0.$$

Aus (20) und (19) folgt

$$(21) \quad [\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)] \leq [\pi_{m+n}(S^n, y_0)] \cdot [\pi_m(S^n, y_0)], \quad m, n > 0.$$

Hieraus und aus dem Korollar zu Satz 3 folgt

Satz 5. *Es gibt höchstens $[\pi_{m+n-1}(S^n)] \cdot [\pi_{m-1}(S^n)]$ paarweise nicht f -homotopieäquivalente (s. Def. 5) Faserräume mit Basis S^m , $m > 1$, und Faser S^n , $n > 0$. ($[\pi_i(S^n)]$ bezeichnet die Ordnung der Gruppe $\pi_i(S^n, y_0)$.)*

Satz 5 gewinnt wesentlich an Inhalt durch die Ergebnisse von J. P. SERRE über die Gruppen $\pi_m(S^n)$. Bekanntlich ist $\pi_m(S^n) = 0$ für $m < n$ und $\pi_n(S^n)$ frei zyklisch (s. LEFSCHETZ: Introduction to Topology, S. 176). Hieraus und aus [6], S. 498, Prop. 5 ergibt sich:

$$(22) \quad \begin{cases} \text{Die Gruppen } \pi_m(S^n) \text{ sind endlich mit Ausnahme von } \pi_k(S^k) \text{ und} \\ \pi_{4k-1}(S^{2k}), \quad k, m, n = 1, 2, \dots \quad \pi_k(S^k) \text{ ist frei zyklisch und } \pi_{4k-1}(S^{2k}) \\ \text{ist direkte Summe einer frei zyklischen und einer endlichen Gruppe.} \end{cases}$$

Wir gehen nun auf die Frage ein, für welche (m, n) es Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ (O_{n+1} = Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n) gibt, die f -homotopieäquivalent (s. Def. 5) aber nicht äquivalent sind. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Satz 6 zusammengefaßt.

Hilfssatz 4. *Es sei O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen der n -Sphäre S^n , $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A.).*

Die Gruppen $\pi_m(O_{n+1}, e)$ und $\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)$, e = Identität von S^n , $m, n > 0$, sind endlich erzeugt, und wenn $p_{m,n}$ resp. $\mathfrak{p}_{m,n}$ den Rang von $\pi_m(O_{n+1}, e)$ resp. $\pi_m(\mathfrak{G}^n, e)$ bezeichnet (Rang = Rang des freien Anteils), so gilt

1. für $m \equiv 0 \pmod{2}$ $p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$,
2. für $m \equiv 1 \pmod{4}$ $p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$ für $n \neq m$,
 $p_{m,m} = 1 = \mathfrak{p}_{m,m}$,

$$\begin{aligned}
 3. \text{ für } m \equiv -1 \pmod{4} \quad p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n} \quad \text{für} \quad n < \frac{m+1}{2}, \\
 p_{m, \frac{m+1}{2}} = 1 = \mathfrak{p}_{m, \frac{m+1}{2}}, \\
 p_{m,n} = 1, \quad \mathfrak{p}_{m,n} = 0 \quad \text{für} \quad n > \frac{m+1}{2}, \quad m \neq n, \\
 p_{m,m} = 2, \quad \mathfrak{p}_{m,m} = 1.
 \end{aligned}$$

Der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n, e)$ (s. U) hat den Rang 1 für $m \equiv -1 \pmod{4}$, $n > \frac{m+1}{2}$ und den Rang 0 in allen anderen Fällen.

Beweis. Wir betrachten den Faserraum $\tilde{\mathbb{G}}^n = \{O_{n+1}, p, S^n, G^n, O_n\}$ des Satzes 3. Die Abbildung $p \circ j: O_{n+1} \rightarrow S^n$ (s. U) ist Projektion eines Faserraumes $\tilde{O}_{n+1} = \{O_{n+1}, p \circ j, S^n, O_n, O_n\}$ (s. [8], 7.6). j ist also eine f -Abbildung von $\tilde{O}_{n+1}$ in $\tilde{\mathbb{G}}^n$ (s. Def. 1) und induziert daher einen Homomorphismus der Homotopiefolge von $\tilde{O}_{n+1}$ in die von $\tilde{\mathbb{G}}^n$ (vgl. hierzu [8], 17.5; dort werden zwar faserfreie Abbildungen betrachtet, benutzt wird jedoch nur, daß es sich um fasernweise Abbildungen handelt):

$$(23) \quad \begin{array}{ccccc}
 & & \Delta_1^* & \xrightarrow{i_1^*} & \pi_m(O_{n+1}) \\
 & \nearrow & \downarrow j_0^* & \downarrow j^* & \searrow p_1^* \\
 \pi_{m+1}(S^n) & \xrightarrow{\Delta_2^*} & \pi_m(G^n) & \xrightarrow{i_2^*} & \pi_m(\mathbb{G}^n) \\
 & \searrow & \downarrow I_1 & & \nearrow p_2^* \\
 & & \pi_{m+n}(S^n) & &
 \end{array}$$

Wir haben bei der Bezeichnung der Homotopiegruppen in (23) die Bezugspunkte weggelassen. Der Bezugspunkt ist y_0 bei $\pi_i(S^n)$ und e bei den übrigen vorkommenden Homotopiegruppen. $j_0: O_n \rightarrow G^n$ bezeichnet die durch j definierte Abbildung⁵⁾, j_0^* den durch j_0 induzierten Homomorphismus.

Ist $L \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\mu} N$ eine exakte Folge abelscher Gruppen und sind L und N endlich erzeugt, dann ist auch M endlich erzeugt, und es ist $\text{Rang}(M) = \text{Rang}(\lambda(L)) + \text{Rang}(\mu(M)) \leq \text{Rang}(L) + \text{Rang}(N)$. Dies wird im folgenden ohne besonderen Hinweis benutzt werden. Der Beweis dafür ist sehr einfach, wir führen ihn für die erste Behauptung durch:

L und N sind endlich erzeugt, also auch $\lambda(L)$ (als Faktorgruppe von L) und $\mu(M)$ (als Untergruppe von N). $\{l_i\}, \{M_k\}$ seien endliche Erzeugendensysteme von $\lambda(L), \mu(M)$. Für jedes k sei $m_k \in M$ so gewählt, daß $\mu(m_k) = M_k$ ist. Dann ist $\{l_i\} \cup \{m_k\}$ ein Erzeugendensystem von M . Sei nämlich α ein beliebiges Element aus M . Es ist $\mu(\alpha) = \sum_k b_k M_k$ mit gewissen ganzen Zahlen b_k .

Setzen wir $\alpha' = \alpha - \sum_k b_k m_k$, so ist $\mu(\alpha') = 0$, also $\alpha' \in \lambda(L)$, also $\alpha' = \sum_i a_i l_i$ mit gewissen ganzen Zahlen a_i . Hieraus ergibt sich aber $\alpha = \sum_i a_i l_i + \sum_k b_k m_k$.

Nach (20) und (22) sind $\pi_m(G^n)$ und $\pi_m(S^n)$ endlich erzeugt. Aus der zweiten Zeile von (23) folgt dann, daß $\pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich erzeugt ist. Entsprechend folgt

aus der ersten Zeile von (23) durch vollständige Induktion nach n , daß $\pi_m(O_{n+1})$ endlich erzeugt ist. Den Anfang der Induktion liefert $\pi_m(O_2) \approx \pi_m(S^1)$ (s. [8], § 22).

1. $m \equiv 0 \pmod{2}$.

Nach (21) und (22) ist $\pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich außer eventuell für $n = m$. Ferner ist $p_2^* : \pi_m(\mathbb{G}^m) \rightarrow \pi_m(S^m)$ Null. Wäre nämlich $p_2^* \neq 0$, gäbe es also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : (S^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{G}^m, e)$ derart, daß $p \circ \tilde{f}$ ein von 0 verschiedenes Element $\alpha \in \pi_m(S^m)$ repräsentierte, so wäre $f : S^m \times S^m \rightarrow S^m$, definiert durch $f(x, x') = \tilde{f}(x) \cdot x'$, eine wegen B stetige Abbildung vom Typus $(\alpha, 1)$ (s. [4], S. 434). Eine solche gibt es aber nicht nach [4], Satz III und Satz I, S. 427. $i_2^* : \pi_m(G^m) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^m)$ ist also ein Homomorphismus auf. Daraus folgt aber nach (20) und (22), daß $\pi_m(\mathbb{G}^m)$ endlich ist.

Aus der ersten Zeile von (23) schließt man durch Induktion nach n und unter Benutzung von (22), daß $\pi_m(O_{n+1})$ endlich ist für $n < m$. Ferner ist $p_1^* : \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(S^m)$ Null, denn $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ und $p_2^* = 0$. Also ist $\pi_m(O_{m+1})$ endlich, und durch vollständige Induktion nach n folgt aus der ersten Zeile von (23): $\pi_m(O_{n+1})$ ist endlich für $n \geq m$.

Da $\pi_m(O_{n+1})$ endlich ist für $m \equiv 0 \pmod{2}$, muß auch der Kern von $j^* : \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich sein.

2. und 3. $m \equiv 1 \pmod{2}$.

Nach [8], 23.4 ist $p_1^* : \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(S^m)$ nicht Null [mindestens alle durch zwei teilbaren Elemente von $\pi_m(S^m)$ sind Bild]. Daher ist $\text{Rang}(\pi_m(O_{m+1})) = \text{Rang}(i_1^*(\pi_m(O_m))) + 1$. Nun ist $\pi_{m+1}(S^m)$ endlich nach (22), also $\text{Rang}(\pi_m(O_m)) = \text{Rang}(i_1^*(\pi_m(O_m)))$, somit

$$(24) \quad p_{m,m} = p_{m,m-1} + 1, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

Aus $p_1^*(\pi_m(O_{m+1})) \neq 0$ und $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ folgt:

a) $p_2^* : \pi_m(\mathbb{G}^m) \rightarrow \pi_m(S^m)$ ist nicht Null. Da $\pi_m(G^m)$ endlich ist nach (20) und (22), ergibt sich aus der zweiten Zeile von (23)

$$(25) \quad p_{m,m} = 1, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

b) Der Kern von $j^* : \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^m)$ hat höchstens den Rang $p_{m,m} - 1$. Wegen $p_{m,m} = 1$ hat er mindestens den Rang $p_{m,m} - 1$, d.h.

(26) der Kern von $j^* : \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^m)$, $m \equiv 1 \pmod{2}$, hat den Rang $p_{m,m} - 1$.

Der Homomorphismus $p_1^* : \pi_{m+1}(O_{m+2}) \rightarrow \pi_{m+1}(S^{m+1})$ ist Null wegen $m+1 \equiv 0 \pmod{2}$ (s. 1. Teil dieses Beweises). $\Delta_1 : \pi_{m+1}(S^{m+1}) \rightarrow \pi_m(O_{m+1})$ ist also ein Isomorphismus und der Kern von $i_1^* : \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(O_{m+2})$ hat den Rang 1. Dasselbe gilt für den Kern von $i_2^* : \pi_m(G^{m+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^{m+1})$. Wegen $\pi_m(S^{m+1}) = 0$ folgt hieraus und aus der ersten Zeile von (23)

$$(27) \quad p_{m,m+1} = p_{m,m} - 1, \quad m \equiv 1 \pmod{2},$$

aus der zweiten Zeile $\text{Rang}(\pi_m(\mathbb{G}^{m+1})) = \text{Rang}(\pi_m(G^{m+1})) - 1$, also wegen (20) und (22)

$$(28) \quad p_{m,m+1} = 0, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

Wir unterscheiden nun

2. $m \equiv 1 \pmod{4}$.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n : $p_{m,n} = 0$ für $n < m$, aus (24) $p_{m,m} = 1$, aus (27) $p_{m,m+1} = 0$ und wiederum durch vollständige Induktion nach n aus der ersten Zeile von (23): $p_{m,n} = 0$ für $n \geq m+1$.

Hieraus und aus (26) folgt die über den Rang des Kernes von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ im Falle $m \equiv 1 \pmod{4}$ gemachte Aussage.

Nach (21) und (22) ist $p_{m,n} = 0$ außer eventuell für $n = m$ oder $n = m+1$. Nach (25) und (28) ist $p_{m,m} = 1$, $p_{m,m+1} = 0$.

3. $m \equiv -1 \pmod{4}$.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n : $p_{m,n} = 0$ für $n < \frac{m+1}{2}$. Für diese n ist dann auch der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich, wie behauptet.

$\pi_{m-1}\left(\frac{O_{m+1}}{2}\right)$ ist endlich wegen $m-1 \equiv 0 \pmod{2}$ (s. 1. Teil dieses Beweises), und $\pi_m\left(S^{\frac{m+1}{2}}\right)$ hat den Rang 1 [s. (22)]. Der Kern von $\Delta_1: \pi_m\left(S^{\frac{m+1}{2}}\right) \rightarrow \pi_{m-1}\left(\frac{O_{m+1}}{2}\right)$, d. i. $p_1^*\left(\pi_m\left(\frac{O_{m+1}}{2} + 1\right)\right)$, muß also den Rang 1 haben. $\pi_m\left(\frac{O_{m+1}}{2}\right)$ ist endlich, also $p_{m, \frac{m+1}{2}} = 1$.

Aus $\text{Rang}\left(p_1^*\left(\pi_m\left(\frac{O_{m+1}}{2} + 1\right)\right)\right) = 1 = p_{m, \frac{m+1}{2}}$ und $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ folgt:

a) $\text{Rang}\left(p_2^*\left(\pi_m\left(\mathbb{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)\right)\right) = 1$. Da $\pi_m\left(\mathbb{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)$ endlich ist nach (20) und (22), ergibt sich aus der zweiten Zeile von (23)

$$(29) \quad p_{m, \frac{m+1}{2}} = 1, \quad m \equiv -1 \pmod{4}.$$

b) Der Kern von $j^*: \pi_m\left(\frac{O_{m+1}}{2} + 1\right) \rightarrow \pi_m\left(\mathbb{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)$ hat den Rang 0.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n : $p_{m,n} = 1$ für $\frac{m+1}{2} \leq n < m$, aus (24) $p_{m,m} = 2$, aus (27) $p_{m,m+1} = 1$ und wiederum durch vollständige Induktion nach n aus der ersten Zeile von (23): $p_{m,n} = 1$ für $n \geq m+1$.

Nach (21) und (22) ist $p_{m,n} = 0$ außer eventuell für $n = \frac{m+1}{2}$, $n = m$ oder $n = m+1$. Nach (29), (25) und (28) ist $p_{m, \frac{m+1}{2}} = 1$, $p_{m,m} = 1$, $p_{m,m+1} = 0$.

Der Rang des Kernes von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ ist 1 für $n > \frac{m+1}{2}$. Dies folgt für $n \neq m$ aus $p_{m,n} = 1$, $p_{m,n} = 0$ und für $n = m$ aus $p_{m,m} = 2$ und (26).

Bemerkung 5. Nach [7], Prop. 3, Coroll. 2, S. 289 ist $p_{m,n}$ gleich der m -ten Bettischen Zahl von R_{n+1} (= Gruppe der Drehungen der S^n). Die

Bettischen Zahlen von R_{n+1} sind von PONTRJAGIN [5] u. a. bestimmt worden. Wir hätten uns also, was die $p_{m,n}$ betrifft, auf diese Ergebnisse berufen können. Der Beweis des Hilfssatzes 4 wäre dadurch jedoch nicht wesentlich einfacher geworden.

Satz 6. Es seien m und n natürliche Zahlen, O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen der n -Sphäre S^n .

I. Genau dann, wenn $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$

oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq \frac{m}{2}$ ist,

gibt es unendlich viele paarweise nicht äquivalente Faserräume

$$\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}.$$

II. Ist $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$

oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n = \frac{m}{2}$,

so gibt es unendlich viele paarweise nicht f -homotopieäquivalente (s. Def. 5) Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$.

Ist dagegen (m, n) ein Zahlenpaar, das keiner dieser beiden Bedingungen genügt, so gibt es nur endlich viele paarweise nicht f -homotopieäquivalente Faserräume mit Basis S^m und Faser S^n .

III. Ist $m \equiv 0 \pmod{4}$ und $n > \frac{m}{2}$ so gibt es zu jedem Faserraum

$$\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$$

unendlich viele zu $\mathfrak{B}$ f -homotopieäquivalente aber untereinander paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B}_v = \{B_v, p_v, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $v = 1, 2, \dots$.

Ist dagegen $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \leq \frac{m}{2}$, so gibt es nur endlich viele f -homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume mit Basis S^m , Faser S^n und Gruppe O_{n+1} .

IV. Sind $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i = 1, 2$, f -homotopieäquivalente Faserräume und ist $m \leq 3$ oder $n \leq 2$, dann sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ äquivalent.

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A), $j: O_{n+1} \rightarrow \mathfrak{G}^n$ die „Injektion“, $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$ der durch j induzierte Homomorphismus (s. U), e die Identität von S^n .

O_{n+1} zerfällt in zwei Bogenkomponenten; die eine, R_{n+1} , enthält die Drehungen der S^n , die andere enthält Abbildungen vom Grade -1 . $\mathfrak{G}_1(S^n, S^n)$ (s. I) zerfällt ebenfalls in zwei Bogenkomponenten; die eine besteht aus den Selbstabbildungen der S^n vom Grade 1, die andere aus den Abbildungen vom Grade -1 . Die Gruppen $\pi_0(O_{n+1}, e)$ (s. [8], 16.10) und $\pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ (s. L) sind also zyklisch von der Ordnung 2 und $j^*: \pi_0(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ ist ein Isomorphismus auf. Wir identifizieren: $\pi_0(O_{n+1}, e) = \pi_0(\mathfrak{G}^n, e) = \pi_0$. $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ wird damit zu einem Operatorhomomorphismus bezüglich der Operatorengruppe π_0 (s. [8], 16.10 und Q).

Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i = 1, 2$, Faserräume mit den charakteristischen Abbildungen T_i (s. V). T_i^* bezeichne das durch T_i repräsentierte Element von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$.

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann äquivalent, wenn T_1^* und T_2^* äquivalent sind bezüglich π_0 (s. [8], 18.3).

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann f -homotopieäquivalent, wenn $j^*(T_1^*)$ und $j^*(T_2^*)$ äquivalent sind bezüglich π_0 (s. Satz 4).

Jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (O_{n+1}, e)$ kommt als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ vor (s. [8], 18.2).

Hieraus ergibt sich:

a) Ist $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{U}^n, e)$ ein Isomorphismus und sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ f -homotopieäquivalent, dann sind sie sogar äquivalent.

b) Ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{U}^n, e)$ endlich, dann gibt es nur endlich viele f -homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$. Ist nämlich $\alpha \in \pi_{m-1}(\mathfrak{U}^n, e)$ und α' das Bild von α bei dem einzigen eventuell nicht trivialen Operator aus π_0 , dann gibt es nur endlich viele Elemente von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$, die sich bei j^* in α oder α' abbilden.

c) Ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{U}^n, e)$ unendlich, dann gibt es zu jedem Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ unendlich viele zu $\mathfrak{B}$ f -homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B}_v = \{B_v, p_v, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $v = 1, 2, \dots$. Dann gibt es nämlich zu jedem $\alpha \in j^*(\pi_{m-1}(O_{n+1}, e))$ unendlich viele $\beta_\mu \in \pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ mit $j^*(\beta_\mu) = \alpha$. Höchstens je zwei der β_μ sind äquivalent bezüglich π_0 .

Wir beweisen zunächst die Aussagen des Satzes 6 für den Fall $m = 1$. Es gibt zwei nicht äquivalente Faserräume $\{B, p, S^1, S^n, O_{n+1}\}$, denn $\pi_0(O_{n+1}, e)$ enthält zwei Elemente (s. [8], 18.5). Diese beiden Faserräume sind nicht f -homotopieäquivalent, denn $j^*: \pi_0(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{U}^n, e)$ ist ein Isomorphismus [s. a)]. Es gibt nur zwei nicht f -homotopieäquivalente Faserräume mit Basis S^1 und Faser S^n , denn $\pi_0(\mathfrak{U}^n, e)$ enthält nur zwei Elemente (s. Koroll. zu Satz 3).

Wir setzen von nun an $m > 1$ voraus.

I. Die Gruppe $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ ist nach Hilfssatz 4 genau dann unendlich, wenn $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$ oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq \frac{m}{2}$ ist. Höchstens je zwei Elemente von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ sind äquivalent bezüglich π_0 . Hieraus und aus [8], 18.5 folgt die Behauptung.

II. Ist $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$ oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n = \frac{m}{2}$, so ist die Gruppe $j^*(\pi_{m-1}(O_{n+1}, e))$ nach Hilfssatz 4 unendlich. Höchstens je zwei Elemente dieser Gruppe sind äquivalent bezüglich π_0 . Hieraus und aus Satz 4 folgt die erste Behauptung von II. Genügt das Zahlenpaar (m, n) keiner der beiden eben genannten Bedingungen, so ist die Gruppe $\pi_{m-1}(\mathfrak{U}^n, e)$ endlich nach Hilfssatz 4. Hieraus und aus dem Korollar zu Satz 3 folgt die zweite Behauptung von II.

III. Nach Hilfssatz 4 ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ genau dann unendlich, wenn $m \equiv 0 \pmod{4}$ und $n > \frac{m}{2}$ ist. Hieraus und aus b) und c) S. 134 folgt die Behauptung.

IV. Wir beweisen, daß $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ ein Isomorphismus ist für $m \leq 3$ oder $n \leq 2$. Dann folgt die Behauptung aus a) S. 134. Da R_{n+1} die Bogenkomponente von e in O_{n+1} ist, unterscheiden wir nicht zwischen $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ und $\pi_{m-1}(R_{n+1}, e)$.

$m=2$. Wir betrachten das Diagramm (23) mit $m=1$. Nach [10], 5.2 ist $I_1 \circ j_0^*: \pi_1(O_n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^n)$ ein Isomorphismus auf, also wegen (20) auch j_0^* . Sei $\alpha \in \pi_1(O_{n+1})$ und $j^*(\alpha) = 0$. Dann ist $p_1^*(\alpha) = p_2^* \circ j^*(\alpha) = 0$. Die erste Zeile von (23) ist exakt, also $\alpha = i_1^*(\beta)$ für geeignetes $\beta \in \pi_1(O_n)$. Nun ist $i_2^* \circ j_0^*(\beta) = j^* \circ i_1^*(\beta) = j^*(\alpha) = 0$ und die zweite Zeile von (23) exakt, also $j_0^*(\beta) = \Delta_2(\gamma)$ für geeignetes $\gamma \in \pi_2(S^n)$. Hieraus folgt $\beta = (j_0^*)^{-1} \circ \Delta_2(\gamma) = \Delta_1(\gamma)$. Die erste Zeile von (23) ist exakt, also $0 = i_1^* \circ \Delta_1(\gamma) = i_1^*(\beta) = \alpha$. $j^*: \pi_1(O_{n+1}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{G}^n)$ ist also ein Isomorphismus.

$m=3$. Nach [8], 22.10 ist $\pi_2(O_{n+1}) = 0$. $j^*: \pi_2(O_{n+1}) \rightarrow \pi_2(\mathfrak{G}^n)$ ist also sicher ein Isomorphismus.

$n=1$. Wir betrachten das Diagramm (23) mit $n=1$ und $m-1$ statt m . $p_1^*: \pi_{m-1}(O_2) \rightarrow \pi_{m-1}(S^1)$ ist ein Isomorphismus auf ($\pi_{m-1}(O_2) = \pi_{m-1}(R_2)$, $R_2 = S^1$). Wegen $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ ist also auch $j^*: \pi_{m-1}(O_2) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^1)$ ein Isomorphismus.

$n=2$. Wir setzen $m > 2$ voraus und betrachten (23) mit $n=2$ und $m-1$ statt m . Nach [8], 22.2 ist $\pi_{m-1}(O_2) = 0$, also $i_1^*(\pi_{m-1}(O_2)) = 0$, also $p_1^*: \pi_{m-1}(O_3) \rightarrow \pi_{m-1}(S^2)$ ein Isomorphismus und wegen $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ auch $j^*: \pi_{m-1}(O_3) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^2)$ ein Isomorphismus.

X. Die einfachsten Beispiele von Faserräumen $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i=1, 2$, die f -homotopieäquivalent aber nicht äquivalent sind, erhält man nach Satz 6 für $m=4$, $n=3$. Wir geben zur Erläuterung der allgemeinen Ergebnisse einen Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, S^4, S^3, O_4\}$ an, der dem Produkt $S^4 \times S^3$ f -homotopieäquivalent aber nicht äquivalent ist. Wir definieren $\mathfrak{B}$ durch eine charakteristische Abbildung $T: S^3 \rightarrow O_4$ (s. V).

$\pi_2(O_3, e)$ ist frei zyklisch und ein erzeugendes Element dieser Gruppe wird durch die zweiblättrige Überlagerung $\tau: S^3 \rightarrow R_3$ repräsentiert (s. [8], 22.3). $\tau^{12}: S^3 \rightarrow O_3$ sei durch $x \rightarrow (\tau(x))^{12}$, $x \in S^3$ erklärt. τ^{12} repräsentiert das Element 12 $\tau^* \in \pi_3(O_3, e)$ (s. [8], 16.7).

Wir betrachten das Diagramm (23) für $m=3$, $n=3$. Nach [7], Prop. 10, S. 284 hat $\pi_6(S^3)$ die Ordnung 12. Hieraus und aus (20) folgt $j_0^*(12\tau^*) = 12j_0^*(\tau^*) = 0$. Dagegen ist $i_1^*(12\tau^*) \neq 0$, denn $i_1^*: \pi_3(O_3) \rightarrow \pi_3(O_4)$ ist ein Isomorphismus (s. [8], 22.6).

Es sei nun $\mathfrak{B} = \{B, p, S^4, S^3, O_4\}$ ein Faserraum mit charakteristischer Abbildung $T = i_1 \circ \tau^{12}$ (s. [8], 18.2), $i_1: O_3 \rightarrow O_4$ die Injektion. $\mathfrak{B}$ ist dem

Produkt $S^4 \times S^3$ nicht äquivalent (s. [8], 18.3). Wegen $j^*(i_1^*(12\tau^*)) = i_2^* \circ j_0^*(12\tau^*) = 0$ ist $j \circ T$ nullhomotop, also $\mathfrak{B}$ dem Produkt $S^4 \times S^3$ f -homotopieäquivalent¹¹⁾ (s. Satz 3).

Literatur.

- [1] ARENS, R.: Topologies for homeomorphism groups. Amer. J. Math. **68**, 593—610 (1946). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, chap. X: Espaces fonctionnels. — [3] FOX, R. H.: On fibre spaces II. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 733—735 (1943). — [4] HOPF, H.: Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fundamenta Mathematicae **25**, 427—440 (1935). — [5] PONTRJAGIN, L.: Sur les nombres de Betti des groupes de Lie. C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 1277—1280 (1935). — [6] SERRE, J. P.: Homologie singulière des espaces fibrés; applications. Ann. of Math. **54**, 425—505 (1951). — [7] SERRE, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. **58**, 258—294 (1953). — [8] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton Math., Ser. 14. — [9] THOM, R.: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. École norm. sup. (3) **69**, 109—182 (1952). — [10] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460—475 (1946). — [11] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial Homotopy. I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

¹¹⁾ Dagegen ist der zu $\mathfrak{B}$ assoziierte Hauptfaserraum $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\tilde{B}, \tilde{\gamma}, S^4, O_4, O_4\}$ dem Produkt $S^4 \times O_4$ nicht f -homotopieäquivalent (vgl. M. L. CURTIS, Ann. of Math. **60**, Theorem 10.1). Sonst gäbe es nämlich eine f -Abbildung $S^4 \times O_4 \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}$. Eine Schnittfläche in $S^4 \times O_4$ ginge dabei in eine Schnittfläche in $\tilde{\mathfrak{B}}$ über. $\tilde{\mathfrak{B}}$ wäre also dem Produkt $S^4 \times O_4$ äquivalent (s. [8], 8.3), also auch $\mathfrak{B}$ äquivalent zu $S^4 \times S^3$ (s. [8], 8.2). Dies beantwortet eine Frage von R. THOM [9], S. 167.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Dezember 1954.)

Projektive Ebenen über Fastkörpern.

Von

JOHANNES ANDRÉ.

Einleitung.

1. Ziel dieser Arbeit ist es, als Beginn genauerer Untersuchungen über die Struktur der Translationsebenen (das sind projektive Ebenen, deren Translationsgruppe die eigentlichen Punkte transitiv permutiert, vgl. [1], Definition 6), besonders einfache Typen solcher Ebenen genauer zu betrachten. Eine Translationsebene kann nach [1] und [4]¹⁾ aufgefaßt werden als eine Ebene über einem Quasikörper; das ist eine algebraische Struktur, in der im wesentlichen alle Schiefkörperaxiome gelten, mit Ausnahme des Assoziativgesetzes der Multiplikation und des rechtsseitigen Distributivgesetzes $a(b+c) = ab+ac$ (Definition 10 in [1]).

Es erweisen sich nun unter den Translationsebenen nächst den DESARGUESschen Ebenen die Ebenen über einem *Fastkörper* („Fastkörperebenen“) als besonders einfach. Dabei verstehen wir unter einem Fastkörper einen Quasikörper, in dem noch zusätzlich die Multiplikation assoziativ ist. Ebenen dieser Art werden im Verlauf der Arbeit genauer untersucht. GINGERICH kennzeichnete in [3] (vgl. auch [6]) die Fastkörperebenen unter den Translationsebenen auf folgende Weise: Es gibt eine eigentliche Gerade und einen nicht auf dieser gelegenen uneigentlichen Punkt derart, daß die Gruppe aller Perspektivitäten mit diesem Punkt als Zentrum und jener Geraden als Achse transitiv ist in denjenigen Punkten der uneigentlichen Geraden, die von dem Schnittpunkt mit der Achse und dem Zentrum verschieden sind. KLINGENBERG kennzeichnete in [5] die Fastkörperebenen durch einen Schließungssatz (Fig. 4 in [5], s. auch S. 128 unten). LOMBARDO-RADICE und ZAPPA untersuchten in [7] bzw. [9] projektive Ebenen, die zu den hier betrachteten Fastkörperebenen dual sind.

Eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit ist der sog. *Eindeutigkeitsatz* (Satz 7), der besagt, daß nichtisomorphe Fastkörper auch nichtisomorphe Fastkörperebenen erzeugen. Einen entsprechenden Satz für beliebige Quasikörper und Translationsebenen gibt es bekanntlich nicht, wie bereits HALL in [4] (Thm. 5.8) gezeigt hat. Außerdem wird hier eine weitgehende Übersicht über die Struktur der Kollineationsgruppe einer Fastkörperebene gegeben; genauer gesagt: Die Untersuchung der Kollineationsgruppe wird zurückgeführt auf diejenige der multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen Fastkörperelemente und der Automorphismengruppe des Fastkörpers. Dabei ist allerdings zu bemerken, daß die Ebene über dem kleinsten eigentlichen

¹⁾ Vgl. etwa [1], § 5.

Fastkörper (dieser besteht aus 9 Elementen) — im folgenden kurz „Ausnahme-Ebene“ genannt — eine wesentlich anders geartete Kollineationsgruppe besitzt als die übrigen Fastkörperebenen.

2. Der erste Paragraph bringt einige rein algebraische Eigenschaften von Fastkörpern, welche später benötigt werden, die aber auch für sich von Interesse sind. § 2 bringt einiges über die Kennzeichnung von Fastkörperebenen welche über die oben erwähnten Untersuchungen von GINGERICH hinausgehen. Entscheidend ist hierfür der Begriff der *Zulässigkeit* eines geordneten Paares von Punkten der uneigentlichen Geraden einer Translationsebene. Ein solches Paar nennen wir zulässig, wenn die Gruppe aller Perspektivitäten mit dem einen Punkt des Paares als Zentrum und einer eigentlichen Geraden durch den anderen Punkt als Achse transitiv ist in den von diesen verschiedenen Punkten der uneigentlichen Geraden. (Die genaue Definition steht zu Beginn des § 2.) Für die Menge der zulässigen Punktepaare gibt es nur sechs wesentlich verschiedene Möglichkeiten, von der jede eine ganz bestimmte Art von Translationsebenen kennzeichnet (Satz 4). Zwei dieser Möglichkeiten (nämlich IV und V von Satz 4) charakterisieren die Ebenen über Fastkörpern, welche keine Schiefkörper sind. Solche Ebenen werden in den folgenden Paragraphen ausschließlich behandelt.

Es soll gleich bemerkt werden, daß eine Ebene über einem eigentlichen Fastkörper sich weitgehend verschieden verhält, je nachdem, ob sie vom Typ IV oder V (im Sinne von Satz 4) ist. Man kann diese Ebenen kurz folgendermaßen unterscheiden: In Ebenen vom Typ IV läßt *jede* Kollineation zwei verschiedene ausgezeichnete Punkte der uneigentlichen Geraden fest oder vertauscht sie (vgl. § 3, Satz 6). Dagegen ist in der einzigen Ebene vom Typ V, der schon oben erwähnten Ausnahme-Ebene, die Kollineationsgruppe einfach transitiv auf den Punkten der uneigentlichen Geraden (Satz 17).

In den §§ 3 bis 5 werden die von der Ausnahme-Ebene verschiedenen Fastkörperebenen näher untersucht. Allerdings gelten manche der dort gebrachten Untersuchungen auch für die Ausnahme-Ebene, zum Teil in etwas abgeänderter Form. In § 3 wird der oben erwähnte Eindeutigkeitssatz für Fastkörperebenen bewiesen. Die beiden nächsten Paragraphen bringen Untersuchungen über die Kollineationen der Fastkörperebenen. Aus [I], Satz 18 folgt sofort, daß jede Kollineation affin ist, d. h. die uneigentliche Gerade festläßt (Satz 5). § 4 untersucht diejenigen Kollineationen, welche sich aus Perspektivitäten zusammensetzen, das sind die projektiven Kollineationen. Die Struktur ihrer Gruppe ist eng verknüpft mit derjenigen der multiplikativen Gruppe des Fastkörpers (Satz 9). Die Gruppe aller Kollineationen, die in § 5 untersucht wird, erweist sich, modulo der projektiven Gruppe genommen, im wesentlichen als isomorph zur Automorphismengruppe des Koordinatenfastkörpers. Es ergibt sich, daß die Fastkörperebenen wesentlich weniger Kollineationen enthalten, als die DESARGUESSchen Ebenen mit gleicher Punktzahl (vgl. dazu Satz 13).

Im letzten Paragraphen wird, im Gegensatz zu den vorherigen, die Ausnahme-Ebene näher untersucht, insbesondere ihre Kollineationsgruppe. Es

zeigt sich, daß diese Gruppe viel reichhaltiger ist als die bei den übrigen Fastkörperebenen. Sie ist jedoch immer noch kleiner als die der DESARGUESschen Ebene mit gleicher Punkteanzahl. Die projektiven Kollineationen der Ausnahme-Ebene lassen sich dadurch kennzeichnen, daß sie gerade Permutationen auf den Punkten der uneigentlichen Geraden induzieren (Satz 22). Einige Ergebnisse des § 6 wurden bereits von M. HALL in [4], Anhang II, ohne Beweis angegeben.

§ 1. Algebraisches über Fastkörper.

1. Definition. Ein *Fastkörper*²⁾ F , auch *assoziativer Quasikörper* genannt, ist ein Quasikörper³⁾, in dem zusätzlich das Assoziativitätsgesetz der Multiplikation erfüllt ist. Wir stellen die Axiome, die in einem Fastkörper gelten, hier noch einmal zusammen:

Q0. F besteht aus mindestens zwei Elementen.

Q1. Bezüglich der Addition ist F eine Gruppe.

Q2. Es gilt das linksseitige Distributivgesetz

$$(b + c)a = b a + c a \quad \text{für alle } a, b, c \in F.$$

Q3. Es gilt $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in F$.

Q4. Es gibt ein $1 \in F$, so daß $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in F$ gilt.

Q5. Ist $a \neq 0$, so ist $ay = b$ eindeutig nach y lösbar.

Q6. Ist $a \neq b$, so ist $-xb + xa = c$ nach x lösbar.

Q7. Die Multiplikation von F ist assoziativ.

Die von 0 verschiedenen Elemente eines Fastkörpers F bilden also bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die *multiplikative Gruppe* $F^\times$ von F . Aus den Axiomen Q0 bis Q6 folgt nach [1], Satz 13 oder [8], Satz 1 die Kommutativität der Addition von F . Einen Fastkörper nennen wir *eigentlich*, wenn er kein Schiefkörper ist, d.h., wenn in ihm das rechtsseitige Distributivgesetz nicht immer erfüllt ist. Unter dem *Kern* $K(F)$ eines Fastkörpers F verstehen wir die Menge aller $s \in F$, für die $s(x + y) = sx + sy$ für alle $x, y \in F$ erfüllt ist. $K(F)$ ist ein Schiefkörper, wie in [1], § 6 gezeigt wurde.

ZASSENHAUS hat in [10] alle Fastkörper mit endlichvielen Elementen aufgestellt.

2. In der üblichen Weise folgt aus dem linksseitigen Distributivgesetz, daß in einem Fastkörper F die Beziehungen $0 \cdot a = 0$ und $(-a)b = -ab$ für alle $a, b \in F$ erfüllt sind. $a(-b) = -ab$ kann nicht auf die übliche Art gezeigt werden, da ja das rechtsseitige Distributivgesetz nicht notwendig gilt. Dennoch ist diese Beziehung richtig.

²⁾ In [10] (allerdings mit rechts- statt linksseitigem Distributivgesetz und mit $b = 0$ in Q 6) *vollständiger Fastkörper* genannt.

³⁾ Vgl. [1], S. 170 ff.

Satz 1. Die multiplikative Gruppe eines Fastkörpers F besitzt bei Charakteristik $\neq 2$ genau eine Involution⁴⁾, nämlich -1 , bei Charakteristik 2 keine Involution. Für alle $a, b \in F$ gilt:

$$(1) \quad a(-b) = -ab.$$

Beweis⁵⁾. O. B. d. A. können wir $a \neq 0$ voraussetzen. c sei die nach Q5 eindeutig bestimmte Lösung von $ac = -a$. Hieraus folgt $ac^2 = (-a)c = -ac = -(-a) = a$, also $c^2 = 1$ wegen Q4 und Q5. Bei Charakteristik 2 ist $c = 1$, im anderen Fall ist c eine Involution. Sei nun umgekehrt c eine Involution von $F^\times$. Zu jedem $a \in F$ gibt es dann nach Q6 ein $b \in F$ mit $-b + bc = a$. Hieraus folgt $ac = (-b + bc)c = -bc + b = -a$. Es gibt also höchstens eine Involution in $F^\times$. Bei Charakteristik 2 folgt $c = 1$ im Widerspruch zu unserer Annahme; F enthält also in diesem Fall keine Involution. Bei Charakteristik 2 ist -1 eine Involution, also ist $c = -1$, mithin $a(-1) = -a$ ⁶⁾, also auch (1) erfüllt.

3. Für spätere Untersuchungen benötigen wir den folgenden auch für sich interessanten

Satz 2. Ein Fastkörper F , in dem zusätzlich die Beziehung

$$(2) \quad a(b + c - bc) = ab + ac - abc$$

für alle $a, b, c \in F$ gilt, ist ein Schiefkörper.

Wir müssen also die Gültigkeit des rechtsseitigen Distributivgesetzes für F beweisen. Zweimalige Anwendung von (2) ergibt:

$$a(a'b + a'c - a'bc) = aa'(b + c - bc) = aa'b + aa'c - aa'bc$$

für alle $a, a', b, c \in F$.

O. B. d. A. seien b und c von 0 verschieden; dann erhalten wir, $a' = b^{-1}$ gesetzt:

$$(2') \quad a(1 + b^{-1}c - c) = a + ab^{-1}c - ac.$$

Nun können offenbar $b^{-1}c = c'$ und $-c = d'$ bei geeigneter Wahl von b und c beliebige von 0 verschiedene Werte von F annehmen. Multiplizieren wir (2') von rechts mit einem $b' \neq 0$ aus F und ersetzen dann $b', c'b'$ und $d'b'$ durch b, c und d , so erhalten wir unter Berücksichtigung von Satz 1, daß

$$(3) \quad a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

ist für alle $a \in F$ und alle $b, c, d \in F^\times$.

⁴⁾ Eine Involution in einer Gruppe ist ein von der Gruppeneinheit verschiedenes Element der Ordnung 2.

⁵⁾ Dieser Beweis ist nachgebildet dem entsprechenden von [10], S. 189/190. ZASSENHAUS führte ihn allerdings nur für endliche Fastkörper durch.

⁶⁾ Für allgemeine Quasikörper braucht diese Beziehung nicht zu stimmen. Vgl. [4], S. 274, Beispiel U.

Durch zweimalige Anwendung von (3) ergibt sich:

$$(3') \quad a \sum_{i=1}^5 b_i = \sum_{i=1}^5 a b_i,$$

wenn $a \in F$, die $b_i \in F^\times$ sind und mindestens eine dreigliedrige Summe $b_j + b_k + b_l \neq 0$ ist (hierbei bedeuten j, k, l paarweise verschiedene Indizes zwischen 1 und 5). Verschwinden in der linken Seite von (3') alle dreigliedrigen Summen, so ist also $b_j + b_k + b_l = b_j + b_k + b_m = 0$ für paarweise verschiedene j, k, l, m zwischen 1 und 5, und es ergibt sich $b_l = b_m$, d.h. alle b_i in (3') stimmen überein. Auch dann verschwinden die dreigliedrigen Summen nur bei Charakteristik 3; in diesem Fall ist aber (3') wegen $5 = -1$ nach Satz 1 erfüllt. Also gilt (3') für alle $a \in F$ und alle $b_i \in F^\times$ ($i = 1, \dots, 5$).

Besteht F nur aus zwei Elementen, so ist F der Primkörper der Charakteristik 2. Sonst gibt es ein $d \neq 0$ aus F , so daß auch $1 + d \neq 0$ wird. Setzen wir in (3') nun $b_1 = b$, $b_2 = c$, $b_3 = 1$, $b_4 = d$ und $b_5 = -1 - d$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (3) und (3') die Beziehung

$$\begin{aligned} a(b + c) &= a(b + c + 1 + d + (-1 - d)) = ab + ac + a + ad + a(-1 - d) \\ &= ab + ac + a(1 + d + (-1 - d)) = ab + ac, \end{aligned}$$

d.h. das rechtsseitige Distributivgesetz, zunächst für $b, c \neq 0$, trivialerweise dann jedoch auch allgemein.

4. Geometrisch von besonderem Interesse und besonderer Eigenart sind die Ebenen über den eigentlichen Fastkörpern mit der folgenden zusätzlichen Eigenschaft

A. Es gilt $a^2 = -1$ für alle von 0, +1 und -1 verschiedenen Fastkörperelemente a ⁷⁾.

Die geometrischen Eigenschaften dieser Fastkörper werden in den §§ 2 und 6 genauer untersucht. Hier wollen wir eine Übersicht über alle möglichen Fastkörper mit dieser Eigenschaft gewinnen.

Satz 3. Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen eigentlichen ⁸⁾ Fastkörper mit der Eigenschaft A. Er ist eindeutig dadurch gekennzeichnet, daß er unter allen vorkommenden eigentlichen Fastkörpern möglichst wenig Elemente, nämlich 9, enthält. Seine multiplikative Gruppe ist isomorph zur Quaternionengruppe.

Dem Beweis stellen wir einige Hilfssätze voran. Hierbei sei F stets ein eigentlicher Fastkörper mit der Eigenschaft A.

Hilfssatz 1. Für $a \neq 0$, ± 1 aus F gilt $a^{-1} = -a$. Ist ferner $b \neq 0$, ± 1 aus F und außerdem $b \neq \pm a$, so gilt auch $ba = -ab$.

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus der Eigenschaft A. Haben a und b die im Hilfssatz genannten Eigenschaften, so ist $ab^{-1}ab^{-1} = -1$, also

⁷⁾ Dies ist ein Spezialfall der von HALL in [4], S. 274 untersuchten Quasikörper vom Rang 2 über ihrem Kern.

⁸⁾ An Schiefkörpern mit der Eigenschaft A gibt es noch genau die Primkörper der Charakteristiken 2, 3 und 5. Dieses Ergebnis wird jedoch im folgenden nicht benutzt.

$ab^{-1} = -ba^{-1}$; hieraus folgt wegen des ersten Teiles unter Berücksichtigung von Satz 1 auch der zweite Teil des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. *F hat die Charakteristik 3.*

Da F eigentlich sein soll, so hat F zwei über dem Primkörper seines Kernes linear unabhängige Elemente 1 und u . Wegen ihrer Unabhängigkeit folgt aus A und Hilfssatz 1 nunmehr

$$-1 = (1+u)^2 = 1+u+u(1+u) = 1+u-(1+u)u = 1+u-u+1 = 2,$$

d.h. $3=0$, wie behauptet.

Hilfssatz 3. *F enthält über dem Primkörper seines Kernes keine drei linear unabhängigen Elemente. Der Kern von F ist der Primkörper der Charakteristik 3. Über seinem Kern hat F den Rang 2 und besteht aus 9 Elementen.*

Beweis. Seien 1, u und v über dem Primkörper des Kernes von F linear unabhängig. Dann ergibt sich, ganz entsprechend wie bei Hilfssatz 2, daß

$$-1 = (1+u+v)^2 = 1+u+v-(1+u+v)u-(1+u+v)v = 3 = 0$$

ist. Es ergibt sich also der Widerspruch $-1=0$. Die restlichen Behauptungen des Hilfssatzes sind nun trivial.

Beweis von Satz 3. Ein eigentlicher Fastkörper mit der Eigenschaft A enthält nach den eben bewiesenen Hilfssätzen also notwendig 9 Elemente. Sei nun umgekehrt F ein eigentlicher Fastkörper aus 9 Elementen. Dann ist $F^\times$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8. Insbesondere enthält also $F^\times$ kein Element der Ordnung 8 (denn sonst wäre $F^\times$ zyklisch). Ferner hat $F^\times$ außer dem Einselement 1 nach Satz 1 genau ein Element der Ordnung 2, nämlich -1 . Die übrigen Elemente $a \in F^\times$ haben mithin die Ordnung 4, also gilt für sie $a^2 = -1$. Somit hat F die Eigenschaft A und $F^\times$ ergibt sich nach [11], S. 110 als isomorph zur Quaternionengruppe. Nun ist leicht zu sehen, daß F zum Bereich R in [4], S. 273 isomorph ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es keine eigentlichen Fastkörper mit weniger als 9 Elementen gibt. Die Elementanzahl eines endlichen eigentlichen Fastkörpers ist eine Primzahlpotenz, aber keine Primzahl, wie sofort aus Satz 15 von [1] folgt. Ein eigentlicher Fastkörper mit weniger als 9 Elementen enthält also notwendig 4 oder 8 Elemente; dessen multiplikative Gruppe hat also die Ordnung 3 oder 7, d.h. Primzahlordnung. Solche Gruppen sind aber zyklisch und kommen mithin als multiplikative Gruppen *eigentlichen* Fastkörper nicht in Frage.

§ 2. Zulässige Punktepaaire.

1. Es sei A im folgenden eine *Translationsebene* ([1], Definition 6), d.h. eine Ebene mit transitiver Translationsgruppe. Nach [1], Satz 14 ist A darstellbar als Ebene über einem Quasikörper Q , wir schreiben dafür $A = \beta(Q)$, in dem Sinne, daß die eigentlichen Punkte von A die geordneten Paare (x, y) von Quasikörperelementen x und y werden, und die Geraden als Punkt-

mengen durch die Gleichungen $y = xa + b$ bzw. $x = c$ ($a, b, c \in Q$) gekennzeichnet sind. Mit U bezeichnen wir durchweg die uneigentliche Gerade von A .

Eine *Perspektivität* π ⁹⁾ von A ist eine Kollineation, welche eine Gerade (ihre *Achse*) punktweise festläßt; π bestimmt eindeutig einen Punkt (ihr *Zentrum*) derart, daß π jede Gerade durch ihn (als Ganzes) festläßt.

Eine Perspektivität von A heißt *eigentlich*, wenn ihre Achse eigentlich ist und ihr Zentrum p auf U liegt. Die eigentliche Gerade H möge U in q schneiden. Wir reden von (p, H) -*Transitivität*⁹⁾, wenn es zu irgend zwei von p und q verschiedenen Punkten r und s aus U eine Perspektivität π mit dem Zentrum p und der Achse H [eine sog. (p, H) -*Perspektivität*⁹⁾] mit $\pi r = s$ gibt. Ist die (p, H) -Transitivität erfüllt und ist H' eine weitere eigentliche Gerade von A , die U in q schneidet, so gilt auch die (p, H') -Transitivität. Es gibt nämlich eine Translation τ , die H in H' überführt, und hat π die eben erwähnte Eigenschaft, so ist $\tau \pi \tau^{-1}$ eine (p, H') -Perspektivität, die ebenfalls r in s überführt. Dies führt zu der folgenden

Definition. Ein *geordnetes* Paar (p, q) von Punkten p und q der uneigentlichen Geraden U einer Translationsebene A heißt *zulässig*, wenn für eine (und damit nach dem eben bemerkten für jede) *eigentliche* Gerade H durch q die Gruppe der (p, H) -Perspektivitäten *transitiv* in den Punkten von $U - \{p\} - \{q\}$ ist, d. h. wenn die (p, H) -Transitivität erfüllt ist. Ein zulässiges Punktepaar geht durch eine affine Kollineation wieder in ein solches über.

Im folgenden betrachten wir im allgemeinen (p, H) -Perspektivitäten, deren Achsen H durch einen festen eigentlichen Punkt, den Nullpunkt des Koordinatensystems, gehen. Perspektivitäten mit dieser Eigenschaft nennen wir kurz (p, q) -Perspektivitäten, wenn $q = H \cap U$ ist. Entsprechend wird der Begriff der (p, q) -Transitivität eingeführt. (p, q) -Transitivität bedeutet (p, H) -Transitivität für alle durch q gehenden Geraden H (s. auch [2]).

2. Die geordneten Paare (p, q) kann man auffassen als Elemente der Produktmenge $U \times U$. Wir untersuchen jetzt, welche Teilmengen von $U \times U$ als die Menge aller zulässigen Paare einer (geeignet gewählten) Translationsebene A in Frage kommen. Es gibt sechs wesentlich verschiedene Möglichkeiten.

Satz 4. *Es gibt genau die folgenden Möglichkeiten für die Menge Z aller zulässigen Punktepaare der uneigentlichen Geraden U einer Translationsebene A :*

- I. Z ist leer.
- II. Z besteht aus genau einem Paar (p, p) . Genau in diesem Fall ist A eine Ebene über einem distributiven Quasikörper¹⁰⁾, der kein Linksalternativkörper ist.
- III. Z besteht aus genau allen Paaren (p, p) . Genau in diesem Fall ist A eine Ebene über einem Linksalternativkörper, der kein Schiefkörper ist.

⁹⁾ BAER nennt in [2] diese Abbildungen (p, H) -Transformationen. Nach Thm. 6.2 aus [2] ist übrigens die (p, H) -Transitivität gleichbedeutend mit der Gültigkeit des DESARGUESschen Satzes für das Zentrum p und die Achse H .

¹⁰⁾ Ein *distributiver Quasikörper* ist ein Quasikörper, in dem beide Distributivgesetze gelten; in einem *Linksalternativkörper* gilt außerdem noch das Linksalternativgesetz $a(ab) = (aa)b$ für alle a und b des Bereiches. Vgl. auch [1], § 7.

IV. Z besteht aus genau den beiden Paaren (p, q) und (q, p) mit $p \neq q$. Genau in diesem Falle ist A eine Ebene über einem Fastkörper, der mehr als 9 Elemente enthält und kein Schiefkörper ist.

V. Zu jedem $p \in U$ gibt es genau ein von p verschiedenes $q \in U$ derart, daß (p, q) und (q, p) in Z liegen. Z enthält keine weiteren Paare. Es gibt (bis auf Isomorphie) genau eine Translationsebene A mit einer derartig beschaffenen Menge Z , nämlich die Ebene über dem (eindeutig bestimmten) eigentlichen Fastkörper, der aus 9 Elementen besteht.

VI. Z besteht aus allen Paaren. Genau in diesem Falle ist A DESARGUESSCH.

Zum Beweis benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen. Ist (p, p) für ein $p \in U$ zulässig, so läßt sich nach [6], Satz 4¹¹⁾ die Translationsebene darstellen als eine Ebene über einem distributiven Quasikörper D derart, daß die Verbindungsgerade $\langle a, p \rangle$ von a mit p die y -Achse zu dem zu D (nach [1], § 5) gehörenden Koordinatensystem wird für jeden eigentlichen Punkt a und umgekehrt. Wir erhalten also den

Hilfssatz 4. *Liegt ein (p, p) in Z , so ist A darstellbar als eine Ebene über einem distributiven Quasikörper D und umgekehrt.*

Die (p, p) -Perspektivitäten sind in diesem Falle genau die durch

$$(4) \quad (x, y) \rightarrow (x, xk + y)$$

mit $x, y, k \in D$ definierten Abbildungen ([6], S. 27/28).

Hilfssatz 5. *Mit (p, p) und (q, q) [$p, q \in U$; $p \neq q$] liegen alle (r, r) in Z . Genau in diesem Falle ist A eine Ebene über einem Linksalternativkörper.*

Denn wegen $(p, p) \in Z$ kann q durch eine geeignete (p, p) -Perspektivität in jedes von p verschiedene $r \in U$ übergeführt werden. Der zweite Teil des Hilfssatzes folgt dann aus einem Satz von LENZ ([6], Satz 6¹²⁾), denn A hat in diesem Falle ein Schiebungsdiagramm (im Sinne von [6], S. 24/25) vom Typ VIb oder VII.

Hilfssatz 6. *Mit (p, q) [$p, q \in U$; $p \neq q$] ist auch (q, p) zulässig. A ist genau in diesem Falle darstellbar als eine Ebene über einem Fastkörper. Die Gruppe der (p, q) -Perspektivitäten ist isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Fastkörpers. Es gibt in A eine eigentliche Perspektivität, die p mit q vertauscht (GINGERICH [3]).*

Beweis. (a) Sei $(p, q) \in Z$. Die Koordinatenachsen seien so gewählt, daß q bzw. p zu uneigentlichen Punkten der x - bzw. y -Achse werden. F sei ein zu diesen Achsen (gemäß [1], § 5) gehörender Quasikörper. Wir zeigen, daß F sogar ein Fastkörper ist.

Eine (p, q) -Perspektivität π ist unter der eben gemachten Annahme über die Koordinatenachsen eine Abbildung der Form:

$$\pi(x, y) = (x, \hat{\pi} y) \quad (x, y \in F),$$

¹¹⁾ In [6] sind gegenüber [1] und dieser Arbeit x mit y und die Reihenfolge der Faktoren in den Geradengleichungen vertauscht. Der folgende Hilfssatz wurde bereits von GINGERICH in [3] bewiesen.

¹²⁾ In [1], S. 176 irrtümlich als „Hilfssatz 7“ bezeichnet.

wobei $\hat{\pi}$ eine eindeutige Abbildung von F auf sich ist. Insbesondere geht (x, x) in $(x, \hat{\pi}x)$ über. Andererseits hat aber die aus allen (x, x) bestehende Gerade als Bild eine Gerade, die aus allen (x, xk) für ein $k \neq 0$ aus F besteht, also gilt $\hat{\pi}x = xk$ für alle $x \in F$. Wegen der (p, q) -Transitivität gibt es zu jedem $k \neq 0$ aus F ein $\hat{\pi}$ und dazu eine (p, q) -Perspektivität π mit der eben genannten Eigenschaft. Zu k' gehöre die (p, q) -Perspektivität π' . Dann ist auch $\pi'\pi$ eine (p, q) -Perspektivität und es gilt:

$$(xk)k' = \hat{\pi}'(xk) = \hat{\pi}'(\hat{\pi}x) = (\hat{\pi}'\hat{\pi})x = \widehat{\pi'\pi}x = xk''$$

für ein $k'' \neq 0$ und alle $x \in F$. Aus $x=1$ folgt $k'' = kk'$. Es folgt also das Assoziativgesetz der Multiplikation zunächst für $k, k' \neq 0$, aber trivialerweise auch sonst. F ist also ein Fastkörper. Die Zuordnung $\pi \leftrightarrow k^{-1}$ ist außerdem ein Isomorphismus zwischen der Gruppe der (p, q) -Perspektivitäten und $F^\times$.

(b) Ist umgekehrt A eine Ebene über einem Fastkörper F , so gibt es $p, q \in U$ mit $p \neq q$ und $(p, q) \in Z$. Nehmen wir nämlich q bzw. p als uneigentliche Punkte der x - bzw. y -Achse, so ist für jedes $k \neq 0$ die durch

$$(5) \quad \bar{k}(x, y) = (x, yk)$$

definierte Abbildung $\bar{k}$ eine (p, q) -Perspektivität. Die Gerade $y = xa$ wird durch (5) mit $k = a^{-1}b$ in $y = xb$ ($a, b \neq 0$ aus F) abgebildet; hieraus folgt die (p, q) -Transitivität.

(c) Ist A eine Ebene über einem Fastkörper, so ist die Abbildung ε , welche durch

$$(6) \quad \varepsilon(x, y) = (y, x) \quad (x, y \in F)$$

definiert ist, eine eigentliche Perspektivität von A , welche die Gerade $y = xa + b$ in $y = xa^{-1} - ba^{-1}$ und die Gerade $x = 0$ ($y = 0$) in $y = 0$ ($x = 0$) überführt. Die Achse dieser Perspektivität ist die Gerade $y = x$, das Zentrum der uneigentlichen Punkt der Geraden $y = -x$.

Das Zentrum von ε liegt also genau bei Charakteristik 2 auf der Achse.

Die Kollineation ε vertauscht p mit q ; die Zulässigkeit von (p, q) zieht also diejenige von (q, p) nach sich. Damit ist auch der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen¹³⁾.

Hilfssatz 7. Sind für paarweise verschiedene $p, q, r \in U$ die Paare (p, q) und (p, r) zulässig, so ist A DESARGUESCH (GINGERICH [3]).

Beweis. Wir können o. B. d. A. p, q und r als die uneigentlichen Punkte der Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $y = x$ annehmen. Wegen $(p, q) \in Z$ ist A nach Hilfssatz 6 eine Ebene über einem Fastkörper F . Wir zeigen jetzt, daß F bei der weiteren Voraussetzung $(p, r) \in Z$ ein Schiefkörper ist.

Eine (p, r) -Perspektivität π hat die Form:

$$\pi(x, y) = (x, \pi^*(x, y)).$$

¹³⁾ Zu (b) und (c) vgl. auch [6], Hilfssatz 4.

Die Gerade $y = y_0$ geht durch π in eine Gerade $y = xk + y_0 - y_0k$ über, wenn wir annehmen, daß die x -Achse auf die Gerade $y = xk$ abgebildet wird; also ist $\pi^*(x, y) = xk + y - yk$. Wegen der (p, r) -Transitivität gibt es zu jedem $k \neq 1$ aus F eine (p, r) -Perspektivität π mit:

$$\pi(x, y) = (x, xk + y - yk).$$

Ist die (p, r) -Perspektivität π' auf dieselbe Weise durch $k' \neq 1$ aus F bestimmt, so ist auch $\pi' \pi(x, y) = (x, xk' + xk - xkk' + y - yk' - yk + ykk')$ eine (p, r) -Perspektivität. Es gibt also ein $k' \neq 1$ aus F mit $xk + xk' - xkk' = xk''$ für alle $x \in F$. Für $x = 1$ folgt hieraus $k'' = k + k' - kk'$ und hieraus die Bedingung (2) von § 1, zunächst für $k, k' \neq 1$, aber trivialerweise dann auch allgemein. Nach Satz 2 ist also F ein Schiefkörper und mithin $\mathbf{A}$ DESARGUESSCH.

Hilfssatz 8. *$\mathbf{A}$ ist genau dann DESARGUESSCH, wenn alle Paare zulässig sind, d. h. wenn $Z = U \times U$ gilt.*

Beweis. (a) Gilt $Z = U \times U$, so sind erst recht die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt, also ist $\mathbf{A}$ DESARGUESSCH.

(b) Sei umgekehrt $\mathbf{A}$ als DESARGUESSCH angenommen. Dann ist nach einem Satz von BAER ([2], Thm. 6.2) die (p, H) -Transitivität für jeden Punkt p und jede Gerade H von $\mathbf{A}$ erfüllt. Also sind erst recht alle Paare von Punkten der uneigentlichen Geraden zulässig.

Hilfssatz 9. *Liegen ein (p, p) und ein (r, s) mit $r \neq s$ in Z , so ist $\mathbf{A}$ DESARGUESSCH.*

Zum Beweis können wir o. B. d. A. annehmen, daß U aus mehr als drei Punkten besteht.

(a) Ist $p = r$, so gibt es eine (p, p) -Perspektivität, die s in ein $t \neq s$ überführt. Aus der Zulässigkeit von (p, s) und der von (p, t) folgt nun die Behauptung nach Hilfssatz 7.

(b) Ist $p = s$, so folgt die Behauptung aus (a) und Hilfssatz 6.

(c) Ist p von r und s verschieden und sei t ein von p, r und s verschiedener Punkt auf U , so gibt es eine (r, s) -Perspektivität, die p in t überführt, also $(t, t) \in Z$. Ferner gibt es eine (p, p) -Perspektivität, die r in t und s in ein $t' \neq t$ überführt, also ist (t, t') zulässig. Anwendung von (a) ergibt jetzt den Hilfssatz.

Hilfssatz 10. *Liegen ein (p, q) mit $p \neq q$ und ein von (p, q) und (q, p) verschiedenes Paar (r, s) mit $r \neq s$ in Z , so ist, von genau einer Ausnahme abgesehen, $\mathbf{A}$ DESARGUESSCH. Die Ausnahme-Ebene ist die Ebene über dem Fastkörper aus 9 Elementen und ist vom Typ V.*

Beweis. O. B. d. A. seien wieder q und p die uneigentlichen Punkte der x - bzw. y -Achse einer Ebene $\mathbf{A}$ über einem Fastkörper F . Ferner sei o. B. d. A. [wegen $(p, q) \in Z$] r der uneigentliche Punkt der Geraden $y = x$; mit r' werde der uneigentliche Punkt von $y = -x$ bezeichnet. Nach Hilfssatz 6 (c) ist die Abbildung ε , welche durch $\varepsilon(x, y) = (y, x)$ [Abbildung (6)] definiert ist, eine (r', r) -Perspektivität mit $\varepsilon p = q$ und $\varepsilon q = p$.

Ist $s \neq r'$, so ist $\varepsilon s \neq s$. Aus der Zulässigkeit von (r, s) und der von $(r, \varepsilon s)$ ergibt sich nun nach Hilfssatz 7, daß **A** DESARGUESSCH ist.

Es sei also von nun an $s = r'$. Besteht F nur aus drei Elementen, so ist F ein Schiefkörper, **A** also DESARGUESSCH. Sei nun t der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa$ mit einem von 0 und ± 1 verschiedenen a aus F . Wegen $(r', r) = (s, r) \in Z$ gibt es eine (r', r) -Perspektivität ϱ mit $\varrho p = t$. Wir setzen $t' = \varrho q = \varrho \varepsilon p$; dann ist $(t, t') \in Z$. Es ist $\varrho \varepsilon = \varepsilon \varrho$ nach Satz 1 wegen $\varepsilon^2 = 1$ und weil die Gruppe der (r', r) -Perspektivitäten die multiplikative Gruppe eines Fastkörpers ist [wegen $(r', r) \in Z$ nach Hilfssatz 6]. Hieraus folgt $t' = \varepsilon t$ und es gilt also $(t, \varepsilon t) \in Z$ für jedes von r und r' verschiedene $t \in U$. Nun gibt es wegen $(p, q) \in Z$ auch eine (p, q) -Perspektivität π mit $t = \pi r$. Es gilt $(t, \pi r') \in Z$; gilt nun $\pi r' \neq \varepsilon t$, so ist **A** nach Hilfssatz 7 DESARGUESSCH.

Es sei also von nun an $\pi r' = \varepsilon t$, d.h. $r' = \pi^{-1} \varepsilon t$. Da t der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa$ ($a \neq 0, \pm 1$ aus F) ist, so ist π durch $\pi(x, y) = (x, ya)$ definiert, und es ergibt sich nun leicht r' als der uneigentliche Punkt der Geraden $y = xa^{-2}$. Andererseits ist aber r' der uneigentliche Punkt der Geraden $y = -x$, also folgt $a^2 = -1$ für alle $a \neq 0, +1$ und -1 aus F .

Damit unter der Voraussetzung unseres Hilfssatzes die Ebene **A** nicht-DESARGUESSCH ist, muß also notwendig der erzeugende Fastkörper F eigentlich sein und die Eigenschaft A (s. § 1) erfüllen. Nun gibt es nach Satz 3 nur einen Fastkörper mit diesen beiden Eigenschaften, nämlich den (eindeutig bestimmten) aus 9 Elementen. Die Ebene über diesem Fastkörper ist nicht-DESARGUESSCH, dennoch sind in ihr alle Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, wie im letzten Paragraph dieser Arbeit gezeigt wird. Ebenso wird dort bewiesen, daß in dieser Ausnahme-Ebene die Menge Z vom Typ V ist.

Beweis von Satz 4. Ist ein $(p, p) \in Z$, so ist **A** nach Hilfssatz 4 eine Ebene über einem distributiven Quasikörper (II). Wenn ein von (p, p) verschiedenes Paar (q, q) in Z liegt, so liegen nach Hilfssatz 5 alle Paare (r, r) [$r \in U$] in Z , und **A** ist eine Ebene über einem Linksalternativkörper (III). Liegt dagegen außer (p, p) ein (r, s) mit $r \neq s$ in Z , so ist **A** nach Hilfssatz 9 DESARGUESSCH (VI).

Liegt ein (p, q) mit $p \neq q$ in Z , so nach Hilfssatz 6 auch (q, p) , und **A** ist eine Ebene über einem Fastkörper (IV). Enthält aber Z noch ein weiteres von diesen verschiedenes Paar, so besteht Z nach Hilfssatz 10, abgesehen von einer Ausnahme (V), aus allen Paaren und **A** ist DESARGUESSCH. Das „genau“ in VI ergibt sich schließlich aus Hilfssatz 8.

§ 3. Der Eindeutigkeitssatz in Fastkörperebenen.

In diesem und den beiden folgenden Paragraphen sei **A** eine Ebene über einem *eigentlichen* Fastkörper F ¹⁴⁾, der aus *mehr* als 9 Elementen besteht. Ebenen dieser Art nennen wir fortan *Fastkörperebenen*. Die *Ausnahme-Ebene* über dem Fastkörper aus 9 Elementen wird in dem letzten Paragraphen gesondert behandelt. Wir interessieren uns hauptsächlich für die Gruppe $\mathfrak{A}$

¹⁴⁾ Das heißt $\mathbf{A} = \beta(F)$ in der Bezeichnung von [1], S. 171.

aller *affinen* Kollineationen von A , das sind diejenigen, welche die uneigentliche Gerade von A festlassen. Ist $\mathfrak{T}$ die Translationsgruppe von A , so gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\mathfrak{A}_0$. Hierbei ist $\mathfrak{A}_0$ die Gruppe der *homogenen* affinen Kollineationen, d.h. derjenigen affinen, welche den Nullpunkt $(0, 0)$ des Koordinatensystems von A festlassen¹⁵⁾. Zunächst folgt aus [1], Satz 18 und [6], Satz 2 der

Satz 5¹⁶⁾. *Jede Kollineation einer Fastkörperebene läßt die uneigentliche Gerade fest, ist also affin. Keine Fastkörperebene ist zu sich selbst dual.*

Eine Fastkörperebene ist eine Ebene vom Typ IV im Sinne von § 2, Satz 4. Die ausgezeichneten Punkte p und q aus U , für die $(p, q) \in Z$ gilt, bleiben also bei jeder Kollineation fest oder werden vertauscht, da ja Z bei jeder Kollineation¹⁷⁾ in sich übergeht. Daraus folgt

Satz 6. *Jede homogene (affine) Kollineation einer Fastkörperebene läßt ihre Koordinatenachsen $x=0$ und $y=0$ fest oder vertauscht sie.*

Diejenigen Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$, welche die Achsen festlassen, bilden offenbar eine Untergruppe $\mathfrak{A}'_0$ vom Index 2, denn die Kollineation (6) von § 2 vertauscht die Achsen und hat die Ordnung 2.

Die eigentlichen Punkte von A , welche nicht auf den Koordinatenachsen liegen, werden durch $\mathfrak{A}'_0$ transitiv permutiert, denn der Punkt $(1, 1)$ kann in (a, b) [$a, b \in F^\wedge$] übergeführt werden durch die homogene Kollineation

$$(x, y) \rightarrow (xa, yb).$$

Nach § 2, Satz 4 (IV) sind alle Koordinatenachsen, die zu Koordinatensystemen über Fastkörpern gehören, zur x - bzw. y -Achse parallel. Sie gehen also aus diesen beiden Achsen hervor durch eine geeignete Translation, eventuell zusammengesetzt mit einer Abbildung (6).

Die Koordinatensysteme (die sich aus den beiden nichtparallelen Koordinatenachsen und dem nicht auf diesen gelegenen Einheitspunkt zusammensetzen), die zu assoziativen Quasikörpern (d.h. Fastkörpern) gehören (im Sinne von [1], § 5), werden also durch die volle Kollineationsgruppe $\mathfrak{A}$ von A transitiv permutiert, was aus den beiden letzten Bemerkungen folgt. Da aber der Koordinaten-Quasikörper durch ein solches Koordinatensystem eindeutig bestimmt ist (s. etwa [1], Schluß des § 5), so folgt der

Satz 7 (Eindeutigkeitssatz). *Ein Fastkörper ist durch seine erzeugte Ebene eindeutig bestimmt; m. a. W.: nichtisomorphe Fastkörper erzeugen nicht-isomorphe Fastkörperebenen.*

Dieser Satz ist auch für die Ausnahme-Ebene erfüllt, denn wir wissen aus § 1, daß es bis auf Isomorphie nur einen Fastkörper mit 9 Elementen gibt.

Fastkörperebenen werden allerdings auch durch andere Quasikörper (die dann aber *keine* Fastkörper sind) erzeugt. Jedoch werden wir im Verlauf dieser Arbeit davon keinen Gebrauch machen.

¹⁵⁾ Vgl. [1], § 7, insbesondere S. 177/178.

¹⁶⁾ Dieser Satz gilt auch für die Ausnahme-Ebene.

¹⁷⁾ Genauer gesagt: Bei jeder Abbildung $\bar{\alpha}$ von $U \times U$, die vermöge $\bar{\alpha}(p, q) = (\alpha p, \alpha q)$ durch eine Kollineation α induziert wird.

§ 4. Projektive Kollineationen in Fastkörperebenen.

1. Wir untersuchen jetzt die Struktur der Gruppe der projektiven Kollineationen (das sind Kollineationen, die Produkte von Perspektivitäten sind, vgl. [I], S. 180) einer Fastkörperebene A , und zwar zunächst die Struktur der Untergruppe $\mathfrak{K}_0$ der homogenen eigentlichen projektiven Kollineationen. Dabei bezeichnen wir eine homogene Kollineation als *eigentlich projektiv*¹⁸⁾, wenn sie sich als Produkt eigentlicher homogener Perspektivitäten [d.h. von Perspektivitäten mit uneigentlichem Zentrum und durch den Nullpunkt $(0, 0)$ gehender Achse] darstellen läßt¹⁹⁾. Zunächst benötigen wir eine Übersicht über die eigentlichen homogenen Perspektivitäten einer Fastkörperebene.

Wir bezeichnen mit u und v die uneigentlichen Punkte der x - bzw. y -Achse des Fastkörper-Koordinatensystemes. Dann sind eigentliche Perspektivitäten die (u, v) -Perspektivitäten $\underline{a}$, welche durch

$$(7) \quad \underline{a}(x, y) = (x a, y) \quad (a \in F^\times)$$

und die (v, u) -Perspektivitäten $\bar{b}$, welche durch

$$(7') \quad \bar{b}(x, y) = (x, y b) \quad (b \in F^\times)$$

definiert sind. Weitere (u, v) - bzw. (v, u) -Perspektivitäten kommen nicht vor, weil jede solche Perspektivität durch ihre Wirkung auf einen von u und v verschiedenen Punkt der uneigentlichen Geraden U eindeutig bestimmt ist. Die eindeutigen Zuordnungen $\underline{a} \leftrightarrow a^{-1}$ bzw. $\bar{b} \leftrightarrow b^{-1}$ vermitteln offenbar Isomorphismen zwischen der Gruppe $\underline{\mathfrak{K}}_0$ der (u, v) -Perspektivitäten bzw. der Gruppe $\bar{\mathfrak{K}}_0$ der (v, u) -Perspektivitäten und der multiplikativen Gruppe $F^\times$ von F .

Weitere (u, w) - bzw. (v, w) -Perspektivitäten mit von u und v verschiedenen $w \in U$ gibt es nicht. Eine solche würde nämlich u (bzw. v) festlassen und v (bzw. u) bewegen, was nach Satz 6 nicht geht. Aus demselben Grunde gibt es auch keine (w, u) - bzw. (w, v) -Perspektivitäten.

Wir fragen nun nach nichtidentischen (w, w') -Perspektivitäten für von u und v verschiedene Punkte w und w' aus U . Nach Satz 6 muß eine solche u mit v vertauschen; es gibt also zu jedem Paar w, w' mit obiger Eigenschaft höchstens eine (w, w') -Perspektivität, und diese hat dann die Ordnung 2. Sei nun auch $w'' \in U$ von u und v verschieden, ferner π die (als existierend angenommene) nichtidentische (w, w') -Perspektivität und ϱ die nichtidentische (w, w'') -Perspektivität. Dann ist $\pi\varrho$ eine (w, w^*) -Perspektivität für ein $w^* \in U$, ferner $\pi\varrho u = \pi v = u$, also $\pi\varrho = \underline{1}$, d.h. $\pi = \varrho^{-1}$. Hieraus folgt aber $w' = w''$. Es gibt also zu jedem $w \in U$ höchstens eine $w' \in U$ derart, daß eine nichtidentische (w, w') -Perspektivität existiert.

¹⁸⁾ Das sind im wesentlichen die in [I], Fußnote 43 als „projektiv“ bezeichneten Kollineationen. Statt „projektiver Kollineation“ sagen wir im folgenden häufig auch „Projektivität“.

¹⁹⁾ Eine homogene Kollineation, die Produkt von eigentlichen Perspektivitäten ist, läßt sich auch als Produkt homogener eigentlicher Perspektivitäten darstellen. Dies folgt leicht aus den Untersuchungen in [I], S. 180.

Ist nun w der uneigentliche Punkt der Geraden $y=x$, so gibt es auch tatsächlich eine nichtidentische (w, w') -Perspektivität für ein $w' \in U$, nämlich die Abbildung ε , welche durch (6) [in § 2] definiert ist. Ist w der uneigentliche Punkt der Geraden $y=xa$ ($a \in F^\times$), so ist $\bar{a} \varepsilon \bar{a}^{-1}$ eine [und damit die einzige] (w, w') -Perspektivität. w' ist hierbei der uneigentliche Punkt von $y=-xa$. Wir haben jetzt erhalten den

Hilfssatz 11. *Die einzigen eigentlichen homogenen Perspektivitäten sind die Abbildungen (7) und (7'), sowie die durch*

$$(8) \quad (x, y) \rightarrow (y a^{-1}, x a)$$

mit $a \in F^\times$ definierten Abbildungen.

Bei den Perspektivitäten (7) und (7') liegt das Zentrum nicht auf der Achse. Die Perspektivitäten (8) haben genau dann ein auf der Achse gelegenes Zentrum, wenn F die Charakteristik 2 hat.

Die Abbildungen (8) sind nämlich gerade die Perspektivitäten $\bar{a} \varepsilon \bar{a}^{-1}$. Der letzte Teil des Hilfssatzes folgt aus einer Bemerkung auf S. 145.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß sich jede homogene eigentliche projektive Kollineation aus den Abbildungen (7), (7') und (8) zusammensetzt, und jede Kollineation von $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}_0$ aus den Abbildungen (7) und (7')²⁰⁾; also gilt wegen $\underline{a} \bar{b} = \bar{b} \underline{a}$ der

Satz 8. *Die eigentlichen homogenen Projektivitäten einer Fastkörperebene, welche die Koordinatenachsen festlassen (d.h. die Abbildungen aus $\mathfrak{N}_0$) sind genau die durch*

$$(9) \quad (x, y) \rightarrow (x a, y b)$$

mit von 0 verschiedenen Fastkörperelementen a und b definierten Abbildungen. Es ist also $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{N}_0$ ²¹⁾, d.h. $\mathfrak{N}_0$ ist isomorph zum direkten Produkt der multiplikativen Gruppe $F^\times$ des Fastkörpers F mit sich.

Die eigentlichen homogenen Projektivitäten (d.h. die Abbildungen aus $\mathfrak{N}_0$) sind genau die Abbildungen (9) und die Abbildungen der Form

$$(9') \quad (x, y) \rightarrow (y b, x a) \quad \text{mit} \quad a, b \in F^\times.$$

Jede eigentliche Projektivität ist Produkt aus höchstens zwei eigentlichen Perspektivitäten.

Nur die letzte Aussage des Satzes ist noch zu beweisen. Die Abbildung (9) setzt sich zusammen aus den Perspektivitäten $\underline{a}$ und $\bar{b}$. Wegen

$$\bar{b} a \cdot b \varepsilon b^{-1}(x, y) = \bar{b} a \underline{b} \varepsilon(x b^{-1}, y) = \bar{b} a \underline{b}(y, x b^{-1}) = \bar{b} a(y b, x b^{-1}) = (y b, x a)$$

²⁰⁾ Denn Abbildungen (8) können nur in gerader Anzahl in einer Produktzerlegung eines $\nu \in \mathfrak{N}_0$ vorkommen. Also tritt auch ε nur in gerader Anzahl auf. Wegen $\bar{\varepsilon} \varepsilon = \varepsilon \varepsilon$ und $\varepsilon^2 = \underline{1}$ gelingt es nun aber, die Perspektivitäten vom Typ (8) aus einer solchen Produktzerlegung zu eliminieren.

²¹⁾ Zur Definition des direkten Produktes s. etwa [10], S. 75.

ist (9') Produkt der beiden eigentlichen Perspektivitäten $\overline{ba}$ und $\underline{b} \varepsilon \underline{b}^{-1}$. Es ist $\mathfrak{N}_0$ eine Untergruppe von $\mathfrak{N}$ vom Index 2.

2. Wir wollen jetzt die Gruppe $\mathfrak{M}$ aller projektiven Kollineationen bestimmen. Eine Kollineation heißt *projektiv*, wenn sie sich aus Perspektivitäten zusammensetzen läßt. In Fastkörperebenen treten außer den eigentlichen Perspektivitäten wegen Satz 5 nur noch die Translationen und Streckungen²²⁾ als Perspektivitäten auf. Wegen der Transitivität der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ hat jede Streckung die Form $\tau \sigma \tau^{-1}$ mit $\tau \in \mathfrak{T}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_0$, wo $\mathfrak{S}_0$ die Gruppe der Streckungen mit dem Fixpunkt $(0, 0)$ [die sog. 0-Streckungen] bedeuten soll. Ebenso hat jede eigentliche Perspektivität (Definition in § 2, Ziffer 1) die Form $\tau \nu \tau^{-1}$ mit $\tau \in \mathfrak{T}$ und $\nu \in \mathfrak{N}_0$. Mithin ist $\mathfrak{M}$ das Erzeugnis der Gruppen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{S}_0$, d. h. $\mathfrak{M}$ ist die kleinste Untergruppe von $\mathfrak{A}$, welche diese drei Untergruppen enthält. Es ist sogar

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{T} \mathfrak{N}_0 \mathfrak{S}_0^{23)},$$

weil $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{M}$ (sogar in $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{N}_0$ ein Normalteiler in der von $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{S}_0$ erzeugten Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist.

Nunmehr ist es leicht, die Kollineationen aus $\mathfrak{M}$ anzugeben. Die 0-Streckungen sind nach [I], Satz 16 genau die durch

$$(x, y) \rightarrow (s x, s y)$$

definierten Abbildungen, wo s ein von 0 verschiedenes Element des Kernes K (Definition in § 1) des Fastkörpers F ist. Nun folgt sofort der

Satz 9. *Die projektiven Kollineationen einer Fastkörperebene (über dem Fastkörper F) sind genau die Abbildungen*

$$(10) \quad (x, y) \rightarrow (s x a + c, s y b + d)$$

und

$$(10') \quad (x, y) \rightarrow (s y b + d, s x a + c)$$

mit $s \in K$, $s \neq 0$, $a, b \in F^\times$ und $c, d \in F$.

Jede projektive Kollineation ist als Produkt von höchstens vier Perspektivitäten darstellbar.

3. Welche 0-Streckungen sind eigentlich, d. h. als Produkt von eigentlichen (homogenen) Perspektivitäten darstellbar? Darüber gibt Auskunft der

Satz 10. *Eine Streckung*

$$(11) \quad (x, y) \rightarrow (s x, s y) \quad \text{mit} \quad s \in K \quad \text{und} \quad s \neq 0$$

ist genau dann eigentlich, wenn s mit jedem Element des Fastkörpers F vertauschbar ist.

²²⁾ Zu den Definitionen s. [I], § 1 (Definitionen 4 und 4a). Nach Satz 5 ist auch die in [I], Fußnote 42 geäußerte Vermutung für Fastkörperebenen (und auch für die Ausnahme-Ebene) erfüllt.

²³⁾ Diese Formel gilt für beliebige Translationsebenen. Die Produktdarstellung eines $\mu \in \mathfrak{M}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. (a) Ist s mit allen $x \in F$ vertauschbar, so ist $(sx, sy) = \underline{s}\bar{s}(x, y)$, also (11) eigentlich.

(b) Ist umgekehrt die Streckung (11) eigentlich, so hat sie nach Satz 8 die Form (9), weil sie die Koordinatenachsen festläßt. Es ist also $sx = xa$ und $sy = yb$ für alle $x, y \in F$. Für $x = y = 1$ folgt hieraus $s = a = b$, also die Vertauschbarkeit von s mit allen $x \in F$.

§ 5. Weitere Kollineationen in Fastkörperebenen.

1. Es sei mit $\mathfrak{A}_0$ die Gruppe derjenigen Kollineationen einer Fastkörperebene A bezeichnet, welche die Punkte $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ [einzeln] in sich überführen. Jede Kollineation von A setzt sich aus einer projektiven Kollineation und einer aus $\mathfrak{A}_0$ zusammen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{I} \mathfrak{A}_0$ genügt es, sich auf homogene Kollineationen zu beschränken. Jede Kollineation $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ läßt nach Satz 6 die Koordinatenachsen fest oder vertauscht sie. Vertauscht α die Koordinatenachsen, so läßt $\alpha \varepsilon = \beta$ sie fest, wenn mit ε wieder die Kollineation (6) [vgl. § 2] bezeichnet wird. Wenn also $\mathfrak{B}_0$ die aus $\underline{1}$ und ε bestehende Gruppe ist, so gilt $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0$. Wegen $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{B}_0 = \underline{1}$ ist diese Produktdarstellung eindeutig bestimmt.

Es möge nun $\beta \in \mathfrak{A}_0$ den Einheitspunkt $(1, 1)$ in den Punkt (a, b) mit $a, b \in F^\times$ überführen. Dann läßt $\sigma = \beta \underline{a}^{-1} \underline{b}^{-1}$ den Einheitspunkt fest und führt die Achsen in sich über. σ bildet also auch die Geraden $y = 1$ und $x = 1$ in sich ab, mithin auch die Punkte $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, 0)$, d.h. $\sigma \in \mathfrak{A}_0$. Aus $\beta = \sigma \underline{a} \underline{b}$ folgt die Produktdarstellung $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_0$. Ferner gilt $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_0 = \underline{1}$, denn aus $\underline{a} \underline{b}(1, 1) = (1, 1)$ folgt $a = 1$ und $b = 1$. Es ist also auch die letztgenannte Produktdarstellung eindeutig bestimmt. Außerdem gilt wegen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0$ auch $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_0$ mit $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_0 = \underline{1}$ und ferner

$$(12) \quad \mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{A}_0 / \mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{A}_0 / \mathfrak{A}_0.$$

Aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{I} \mathfrak{A}_0$ erhält man ferner die eindeutige Produktdarstellung $\mathfrak{A} = \mathfrak{I} \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_0$.

2. Es bleibt jetzt noch die Struktur von $\mathfrak{A}_0$ zu untersuchen. Für ein $\sigma \in \mathfrak{A}_0$ setzen wir $\sigma(x, 0) = (\bar{\sigma}x, 0)$ und $\sigma(0, y) = (0, \bar{\sigma}y)$ für alle $x, y \in F$. Die so definierten Abbildungen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\sigma}$ bilden F eineindeutig auf sich ab. Wegen der Additivität der homogenen affinen Kollineation σ (vgl. [I], § 7, Satz 19) gilt:

$$\sigma(x, y) = \sigma((x, 0) + (0, y)) = (\bar{\sigma}x, 0) + (0, \bar{\sigma}y) = (\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}y).$$

Die aus allen (x, x) bestehende Gerade geht durch σ in sich über, weil ja $(0, 0)$ und $(1, 1)$ Fixpunkte von σ sind. Hieraus folgt $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$. Nun schließt man die Additivität von $\bar{\sigma}$ wegen $\bar{\sigma}0 = 0$ aus der von σ durch:

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}(x + x'), 0) &= \sigma(x + x', 0) = \sigma((x, 0) + (x', 0)) = \sigma(x, 0) + \sigma(x', 0) \\ &= (\bar{\sigma}x, 0) + (\bar{\sigma}x', 0) = (\bar{\sigma}x + \bar{\sigma}x', 0), \end{aligned}$$

also:

$$(13) \quad \bar{\sigma}(x + x') = \bar{\sigma}x + \bar{\sigma}x' \quad \text{für alle } x, x' \in F.$$

Es gilt ferner $\bar{\sigma}1 = 1$ wegen $\sigma(1, 1) = (1, 1)$.

Die Gerade $y = xa$ geht durch $\bar{\sigma}$ in eine Gerade $y = x\sigma^*a$ über; wir können also schreiben:

$$(14) \quad \sigma(x, xa) = (\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}(xa)) = (\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}x\sigma^*a)$$

für alle $x, a \in F$. Für $x=1$ folgt hieraus:

$$\bar{\sigma}a = \bar{\sigma}(1 \cdot a) = \bar{\sigma}1\sigma^*a = \sigma^*a \quad \text{für alle } a \in F,$$

also $\bar{\sigma} = \sigma^*$. Wir erhalten aus (14) somit

$$(13') \quad \bar{\sigma}(xx') = \bar{\sigma}x\bar{\sigma}x' \quad \text{für alle } x, x' \in F.$$

Zusammen mit (13) folgt nun, daß $\bar{\sigma}$ ein Automorphismus von F ist. Umgekehrt definiert jeder Automorphismus $\bar{\sigma}$ von F eine Abbildung $\sigma \in \mathfrak{A}_0$ durch $\sigma(x, y) = (\bar{\sigma}x, \bar{\sigma}y)$. Die so hergestellte eindeutige Zuordnung $\sigma \leftrightarrow \bar{\sigma}$ zwischen $\mathfrak{A}_0$ und der Automorphismengruppe $\alpha = \alpha(F)$ von F ist offenbar ein Isomorphismus:

Satz 11. *Die Gruppe derjenigen Kollineationen, welche jeden der Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ (und damit auch $(1, 1)$, auf sich abbilden, ist isomorph zur vollen Automorphismengruppe des Koordinatenfastkörpers²⁴⁾.*

3. Damit haben wir eine volle Übersicht über die Struktur von $\mathfrak{A}$ erhalten, falls die von $F^\times$ und $\alpha(F)$ bekannt ist.

Satz 12. *Die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Kollineationen einer Fastkörperebene $\mathbf{A}$ erlaubt die folgende Produktdarstellung:*

$$(15) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{T} \mathfrak{N}_0 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{Z}_0.$$

Diese Produktdarstellung ist eindeutig bestimmt. Jede in dieser Produktentwicklung auftretende Gruppe ist Normalteiler in demjenigen Teilprodukt von (15), welches aus dieser und den folgenden Gruppen von (15) besteht.

Die Darstellung (15) folgt aus

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{T} \mathfrak{N}_0 \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{T} \mathfrak{N}_0 \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{A}_0.$$

Die Eindeutigkeit der Produktdarstellung gilt, weil jede in (15) vorkommende Gruppe mit dem Produkt der ihr in (15) folgenden Gruppen jeweils nur das Einselement gemeinsam hat. Die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist Normalteiler in $\mathfrak{A}$; ferner ist $\mathfrak{N}_0$ Normalteiler in $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{N}_0 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{Z}_0$. Ist nämlich $\nu = \pi_1 \dots \pi_r \in \mathfrak{N}_0$ (wo die π_ϱ mit $\varrho = 1, \dots, r$ eigentliche homogene Perspektivitäten bedeuten, welche die Koordinatenachsen festlassen) und $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, so ist $\alpha \nu \alpha^{-1}$ Produkt der eigentlichen Perspektivitäten $\alpha \pi_\varrho \alpha^{-1}$, welche ebenfalls die Achsen festlassen, also $\alpha \nu \alpha^{-1} \in \mathfrak{N}_0$. Weil $\mathfrak{A}_0$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{Z}_0$ vom Index 2 ist, so ist $\mathfrak{A}_0$ sogar Normalteiler in $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{Z}_0$. Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen. Aus ihm folgt sofort der

²⁴⁾ Dieser Satz gilt für beliebige Translationsebenen, wenn der Ausdruck „Koordinatenfastkörper“ durch „Koordinatenquasikörper“ ersetzt wird. Denn bei dem Beweis wurde von dem Assoziativgesetz der Multiplikation kein Gebrauch gemacht.

Satz 13. *Die Kollineationen einer Fastkörperebene sind genau die Abbildungen*

$$(16) \quad (x, y) \rightarrow (\sigma(x) a + c, \sigma(y) b + d)$$

und

$$(16') \quad (x, y) \rightarrow (\sigma(y) b + d, \sigma(x) a + c)$$

mit $\sigma \in \mathfrak{a}(F)$; $a, b \in F^\times$ und $c, d \in F$.

Die Abbildungen (16) sind genau die Kollineationen, welche die uneigentlichen Punkte der Koordinatenachsen festlassen (also diejenigen aus $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{T}$).

Die Strukturen der Faktoren in der Produktentwicklung (15) sind bekannt, wenn man eine Übersicht über F (genauer: über die additive Gruppe von F , $F^\times$ und $\mathfrak{a}(F)$) hat. $\mathfrak{T}$ ist nämlich als Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$ isomorph zur direkten Summe der additiven Gruppe von F mit sich (vgl. [1], S. 171/172). Nach Satz 8 ist $\mathfrak{N}_0 \cong F^\times \times F^\times$; ferner ist $\mathfrak{A}_0$ isomorph zur Automorphismengruppe $\mathfrak{a}(F)$ von F und $\mathfrak{Z}_0$ ist, abstrakt gesehen, die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

Die Gruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{Z}_0$ sind abelsch, also erst recht auflösbar. $\mathfrak{A}$ ist nach Satz 12 also genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{A}_0$ es sind.

Satz 14. *Die Kollineationsgruppe einer Fastkörperebene ist genau dann auflösbar, wenn die multiplikative Gruppe und die Automorphismengruppe des Koordinatenfastkörpers auflösbar sind²⁵⁾.*

Besteht $\mathfrak{A}$ aus endlich vielen Punkten und Geraden, so ist auch $\mathfrak{A}$ endlich. Sei nun q die Elementanzahl von F (q ist eine Primzahlpotenz), ferner a die Ordnung von $\mathfrak{a}(F)$, so ergibt sich für die Ordnung n von $\mathfrak{A}$ aus Satz 12 die Formel:

$$(17) \quad n = 2q^2(q-1)^2 a.$$

4. Wir untersuchen jetzt, welche der Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$ linear sind, d.h. zu $\mathfrak{Q}_0$ gehören. $\mathfrak{Q}_0$ ist definiert als Menge derjenigen Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$, welche mit jedem Element von $\mathfrak{S}_0 \cong K^\times$ ²⁶⁾ vertauschbar sind, d.h. $\mathfrak{Q}_0$ ist der Zentralisator von $\mathfrak{S}_0$ in $\mathfrak{A}_0$. Nach Satz 11 besteht $\tilde{\mathfrak{Q}}_0 = \mathfrak{Q}_0 \cap \tilde{\mathfrak{A}}_0$ aus genau denjenigen durch ein $\sigma \in \mathfrak{a}(F)$ induzierten Abbildungen $(x, y) \mapsto (\sigma x, \sigma y)$, welche linear sind. Das bedeutet für den zugehörigen Automorphismus σ genau:

$$\sigma(s) \sigma(x) = \sigma(sx) = s \sigma(x) \quad \text{für alle } s \in K \quad \text{und} \quad x \in F,$$

d.h. $\sigma(s) = s$ für alle $s \in K$.

Satz 15. *Die Gruppen $\tilde{\mathfrak{Q}}_0$ bzw. $\mathfrak{Q}_0/\mathfrak{N}_0$ sind isomorph zur Gruppe $\mathfrak{a}(F/K)$ derjenigen Automorphismen von F , welche K elementweise festlassen, also der Automorphismen von F bezüglich K .*

²⁵⁾ Aus [10], insbesondere den Sätzen 1 und 18, kann man jetzt schließen, daß — von endlich vielen Ausnahmen abgesehen — die endlichen Fastkörperebenen auflösbare Kollineationsgruppen haben.

²⁶⁾ $K^\times$ ist die multiplikative Gruppe des Kernes K von F . Die Isomorphie mit der Streckungsgruppe $\mathfrak{S}_0$ folgt aus [1], Satz 11 und dem Zusatz zu Satz 16 (S. 175). Vgl. auch S. 151 dieser Arbeit.

Die Abbildungen aus $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0 \subseteq \mathfrak{O}_0$ haben die Form $(x, y) \leftrightarrow (sxa, syb)$ mit $s \in K^\times$ und $a, b \in F^\times$. In $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{N}_0$ liegen genau diejenigen Abbildungen dieser Art, welche gleichzeitig Automorphismen von F sind. Hierzu ist $sxa sya = sx ya$ für alle $x, y \in F$ notwendig, d. h. $xasy = xy$, mithin $a = s^{-1}$. Eine Abbildung $x \leftrightarrow sxs^{-1}$ mit $s \in K^\times$ ist aber ein Automorphismus von F , denn es gilt auch $s(x+y)s^{-1} = sxs^{-1} + sys^{-1}$ für alle $x, y \in F$. Solche Automorphismen nennen wir *innere Automorphismen* des Fastkörpers F .

$\mathfrak{M}_0$ oder $\mathfrak{M}_0/\mathfrak{N}_0$ ist also isomorph zur Gruppe der inneren Automorphismen von F .

Nach Satz 10 gilt $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0$ genau dann, wenn jedes $s \in K$ mit jedem $x \in F$ vertauschbar ist, d. h. wenn der Kern in dem Zentrum²⁷⁾ von F liegt. In diesem Fall ist:

$$\alpha(F/K) \cong \mathfrak{O}_0/\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{O}_0/\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M},$$

d. h. $\mathfrak{L} > \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\alpha(F/K) > 1$ ²⁸⁾.

Eine Übersicht über die wichtigsten in diesem Paragraphen vorkommenden Untergruppen von $\mathfrak{U}_0$ gibt das nebenstehende Diagramm.

5. Was für eine Bedeutung hat $\mathfrak{U}_0/\mathfrak{O}_0$ in Fastkörperebenen? Nach [I], Satz 20 ist diese Gruppe isomorph zu einer Untergruppe der vollen Automorphismengruppe von K . Wegen $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{N}_0 \mathfrak{M}_0$ (vgl. Ziffer 1) und $\mathfrak{N}_0 \subseteq \mathfrak{O}_0$ gilt auch $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{O}_0 \mathfrak{M}_0$, also auch:

$$(18) \quad \mathfrak{U}_0/\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{O}_0 \mathfrak{M}_0/\mathfrak{O}_0 \cong \mathfrak{M}_0/\mathfrak{O}_0 \cap \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0/\mathfrak{O}_0.$$

Wegen $\mathfrak{M}_0 \cong \alpha(F)$ und $\mathfrak{O}_0 \cong \alpha(F/K)$ gilt also:

$$(18') \quad \mathfrak{M}_0/\mathfrak{O}_0 \cong \alpha(F)/\alpha(F/K).$$

Sei ϱ ein Automorphismus von K , der sich auf F erweitern läßt, d. h. zu dem es (mindestens) einen Automorphismus ϱ^* von F gibt, der ϱ in K induziert. Sind ϱ^* und ϱ^{**} zwei solche Erweiterungsautomorphismen von ϱ , so induziert $\varrho^{*-1}\varrho^{**}$ in K den identischen Automorphismus, d. h. $\varrho^{*-1}\varrho^{**} \in \alpha(F/K)$. Umgekehrt induziert mit ϱ^* auch jedes $\varrho^*\sigma$ mit $\sigma \in \alpha(F/K)$ dasselbe ϱ in K . Die Menge aller Erweiterungsautomorphismen eines Automorphismus ϱ von

²⁷⁾ Das Zentrum Z eines Fastkörpers F besteht aus denjenigen $a \in F$, für welche $ax = xa$ für alle $x \in F$ gilt. Z enthält stets die Elemente 0, 1 und -1 (letzteres nach Satz 1) und ist abgeschlossen bezüglich der Multiplikation und Division, jedoch nicht notwendig bezüglich der Addition und Subtraktion. Stets gilt $Z \subseteq K$.

²⁸⁾ Ist F der (eindeutig bestimmte) Fastkörper der Form $K_{q^n, n}$ (in der Bezeichnung von [10], S. 190; für Fastkörper dieser Art stimmen Zentrum und Kern überein) mit $q = 5$ und $n = 2$, so ist nach [10], Satz 18 die Automorphismengruppe von F zyklisch von der Ordnung 2; ferner gilt $\alpha(F) = \alpha(F/K) > 1$. Es gibt also Translationsebenen mit kommutativem Kern, für welche $\mathfrak{L} > \mathfrak{M}$ gilt. Für DESARGUESsche Ebenen ist dagegen stets $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$ (nach [I], Schluß von § 7).

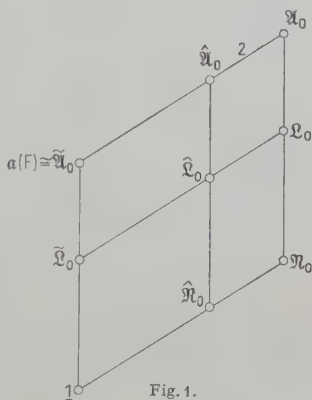


Fig. 1.

K ist also ein Element aus $\alpha(F)/\alpha(F/K)$. Umgekehrt besteht ein solches Element stets aus allen Erweiterungen eines Automorphismus von K auf F .

Diese eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von $\alpha(F)/\alpha(F/K)$ und denen der Gruppe derjenigen Automorphismen von K , welche sich auf F erweitern lassen, ist ein Isomorphismus, denn erlaubt ϱ eine Erweiterung $\varrho^* \in \alpha(F)$ und σ eine σ^* , so erlaubt der Automorphismus $\varrho\sigma$ von K eine Erweiterung $\varrho^*\sigma^*$. Wir erhalten also mittels (18) und (18') den

Satz 16. $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0$ ist isomorph zur Gruppe derjenigen Automorphismen des Kernes K von F , welche sich zu Automorphismen von F erweitern lassen.

Insbesondere lassen sich die inneren Automorphismen von K stets zu Automorphismen von F , nämlich zu den inneren Automorphismen von F erweitern.

$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0$ ist also isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von K , welche alle inneren Automorphismen enthält²⁹⁾.

§ 6. Die Ausnahme-Ebene.

1. Wir untersuchen nunmehr die schon in § 2 eingeführte Ebene A_9 über dem Fastkörper F_9 aus 9 Elementen, insbesondere deren Kollineationsgruppe. Zunächst zeigen wir, daß A_9 eine Ebene vom Typ V (im Sinne von Satz 4) ist³⁰⁾. Hierzu beweisen wir zunächst:

Satz 17. Die Kollineationsgruppe $\mathfrak{A}$ der Ausnahme-Ebene A_9 permutiert die Punkte der uneigentlichen Geraden transitiv.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß der uneigentliche Punkt u der x -Achse durch eine geeignete Kollineation in jeden anderen Punkt der uneigentlichen Geraden U übergeführt werden kann. ε führt u in den uneigentlichen Punkt v der y -Achse über [vgl. § 2, (6)]. Die durch

$$(19) \quad \eta(x, y) = (x - y, x + y)$$

definierte Abbildung η von A_9 auf sich ist eine Kollineation. Denn η führt die x -Achse in die Gerade $y = x$, diese in die y -Achse, diese in die Gerade $y = -x$ und diese schließlich wieder in die x -Achse über. Jede Gerade $y = xa$ für $a \neq 0, \pm 1$ aus F_9 wird durch η auf sich abgebildet, denn wegen der Ausnahmebedingung A von F_9 (vgl. § 1, Ziffer 4) ergibt sich $(x - xa)a = x + xa$. Somit führt η das Büschel der Geraden durch den Nullpunkt (m. a. W. die Kongruenz von A_9 im Sinne von [I], § 2) in sich über. Außerdem ist η linear über dem Kern von F_9 . Nach [I], Satz 19 ist also η eine homogene Kollineation. Sie führt u in den uneigentlichen Punkt w von $y = x$ über. Da u durch $\bar{c}\eta$ in den uneigentlichen Punkt der Geraden $y = xc$ ($c \in F_9^\times$) abgebildet wird, so ist die Transitivität von $\mathfrak{A}_0$ und damit auch die von $\mathfrak{A}$ auf U bewiesen.

Ist $p \in U$ mit $p = \alpha u$ ($\alpha \in \mathfrak{A}_0$) gegeben, so sind wegen der Zulässigkeit von (u, v) auch $(p, \alpha v)$ und $(\alpha v, p)$ zulässig. Wäre (p, q) für ein $q \neq \alpha v$ aus U zulässig, so wäre A_9 DESARGUESCH nach Hilfssatz 7 von § 2.

²⁹⁾ Diese letzte Bemerkung läßt sich für beliebige Translationsebenen beweisen und liefert dann eine Verschärfung des Satzes 20 aus [I].

A_9 ist also eine Ebene vom Typ V^{30}).

2. Nach Satz 17 werden die Geraden durch den Nullpunkt durch $\mathfrak{U}_0$ transitiv permutiert.

Hilfssatz 12. Die von dem Nullpunkt und dem uneigentlichen Punkt verschiedenen Punkte einer Geraden G durch $(0, 0)$ werden transitiv permutiert durch die Untergruppe derjenigen Kollineationen von $\mathfrak{U}_0$, welche G festlassen.

Denn wir können (nach Satz 17) o. B. d. A. G als die x -Achse annehmen, und nun bilden die Kollineationen der Form a eine derartige transitive Gruppe. Aus Satz 17 und Hilfssatz 12 folgt sofort die Transitivität von $\mathfrak{U}_0$ auf den von $(0, 0)$ verschiedenen eigentlichen Punkten von A_9 , d. h.

Satz 18. Die Kollineationen der Ausnahme-Ebene A_9 permutieren ihre eigentlichen Punkte zweifach transitiv, mithin ihre eigentlichen Geraden transitiv.

3. Wir wollen jetzt die Kollineationen aus $\mathfrak{U}_0$ alle aufstellen. Zunächst ist zu bemerken, daß die Ergebnisse der §§ 4 und 5 auch für die Ausnahme-Ebene richtig bleiben, wenn man sich auf diejenigen Kollineationen beschränkt, welche die Koordinatenachsen festlassen oder vertauschen, und wenn man Kollineationen als „projektiv“ nur dann bezeichnen würde, wenn sie Produkt von Perspektivitäten sind, welche ebenfalls die Achsen vertauschen oder festlassen.

Eine Kollineation aus $\mathfrak{U}_0$, die $(1, 0)$ in einen Punkt der Geraden $y = xd$ ($d \in F_9^\times$) bzw. $x = 0$ bzw. $y = 0$ abbildet, führt $(0, 1)$ notwendig über in einen Punkt von $y = -xd$ bzw. $y = 0$ bzw. $x = 0$, denn A_9 ist eine Ebene vom Typ V.

Die Kollineation $\underline{a} \bar{b} \eta \bar{c}$ bildet $(1, 0)$ auf (a, b) und $(0, 1)$ auf $(-ca, cb)$ ($a, b, c \in F_9^\times$) ab. Durch $\underline{a} \bar{b}$ bzw. $\varepsilon \underline{a} \bar{b}$ wird $(1, 0)$ in $(a, 0)$ bzw. $(0, a)$ und $(0, 1)$ in $(0, b)$ bzw. $(b, 0)$ abgebildet. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}_0$ den Komplex, der aus allen Kollineationen der Form $\underline{a} \bar{b} \eta \bar{c}$, $\underline{a} \bar{b}$ und $\varepsilon \underline{a} b$ mit $a, b, c \in F_9^\times$ besteht. $\mathfrak{K}_0$ enthält $8^3 + 8^2 \cdot 2 = 8^2 \cdot 10 = 640$ Elemente. Nach der im vorigen Absatz gemachten Bemerkung gibt es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{U}_0$ genau ein $\kappa \in \mathfrak{K}_0$, welches auf $(1, 0)$ und $(0, 1)$ dieselbe Wirkung wie α hat. $\alpha \kappa^{-1}$ läßt also $(1, 0)$ und $(0, 1)$ fest, wird mithin nach Satz 11 durch einen Automorphismus von F_9 induziert. Es ist also $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{K}_0 \tilde{\mathfrak{U}}_0$, und diese Produktzerlegung ist für jedes $\alpha \in \mathfrak{U}_0$ eindeutig bestimmt. Nach [10], Satz 18 ist die Automorphismengruppe von F_9 isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ in drei Ziffern, also hat $\tilde{\mathfrak{U}}_0$ die Ordnung 6. Mithin hat $\mathfrak{U}_0$ die Ordnung $6 \cdot 8^2 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$. Wir erhalten mithin den

Satz 19. Jede Kollineation $\alpha \in \mathfrak{U}$ der Ausnahme-Ebene A_9 ist eindeutig darstellbar durch $\underline{a} \bar{b} \eta \bar{c} \sigma \tau$ oder $\underline{a} \bar{b} \sigma \tau$ oder $\varepsilon \underline{a} \bar{b} \sigma \tau$ ($a, b, c \in F_9^\times$), wo $\sigma \in \tilde{\mathfrak{U}}_0$ und τ eine Translation bedeutet. Die Ordnungen von $\mathfrak{U}_0$ bzw. $\mathfrak{U}$ sind $2^8 \cdot 3 \cdot 5$ bzw. $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5 = 311040$.

³⁰⁾ Es wurde bereits in § 2 bewiesen, daß keine weitere Translationsebene vom Typ V sein kann.

Der letzte Teil des Satzes folgt aus der Bemerkung, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{T}$ und 9^2 die Ordnung der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist.

Die Gruppe $\mathfrak{A}_0$ wird also von η , den Kollineationen der Form $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ($a, b \in F_9^\times$) sowie den Elementen aus $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ erzeugt. Man kann nun zeigen, daß $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ bereits in dem Erzeugnis von η und den $\underline{a}$ und $\underline{b}$ liegt, d.h.

Satz 20³¹⁾. Die Gruppe aller Kollineationen der Ausnahme-Ebene wird erzeugt durch die Translationen, die (in § 4 erklärten) homogenen Perspektivitäten $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ($a, b \in F_9^\times$) und die (durch (19) definierte) Kollineation η .

Beweis. η^{-1} ist durch $\eta^{-1}(x, y) = (-x - y, x - y)$ gekennzeichnet. Dies ergibt sich nach leichter Rechnung, wenn man berücksichtigt, daß F_9 die Charakteristik 3 hat. Daraus folgt nun: Die Kollineation

$$(20) \quad \sigma_c = \underline{(-1 + c)} \overline{(-1 - c)} \eta^{-1} \bar{c}^{-1} \eta \bar{c} \eta$$

ist für von 0 und ± 1 verschiedene $c \in F_9^\times$ eine Kollineation aus $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ der Ordnung 2³²⁾. Es ist $\sigma_c = \sigma_{-c}$ jedoch sind σ_c , σ_{c+1} und σ_{c-1} paarweise verschieden und stellen wegen $\tilde{\mathfrak{A}}_0 \cong \mathfrak{S}_3$ alle Automorphismen der Ordnung 2 dar. Die zwei Automorphismen der Ordnung 3 sind Produkte von je zwei Automorphismen der Ordnung 2. Damit ist alles gezeigt.

4. Die von $\mathfrak{A}_0$ auf den Punkten der uneigentlichen Geraden U induzierte Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ ist isomorph zu $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{S}_0$ und hat die Ordnung $2^7 \cdot 3 \cdot 5 = 1920$ ³³⁾. Sie ist (nach Satz 17) transitiv, ferner ist sie imprimitiv. Eine Schar konjugierter Imprimitivitätssysteme (vgl. [II], S. 36) bilden offenbar die Paare zulässiger Punkte, wenn man von ihrer Anordnung absieht, m.a.W. die Mengen $\{p, q\} \subset U$ mit $(p, q) \in Z$. Bezeichnen wir die aus diesen Systemen bestehende Menge mit U^* , so können wir sagen, daß $\mathfrak{P}$ auf U^* eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ vom Grade 5 induziert. Nennen wir $\mathfrak{H}_0$ die Gruppe derjenigen homogenen Kollineationen, welche jedes dieser Imprimitivitätssysteme (d.h. jedes Element aus U^*) in sich überführen, so ist $\mathfrak{P}^*$ isomorph zu $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{H}_0$. Weil $\mathfrak{P}^*$ höchstens die Ordnung 120 hat, so hat $\mathfrak{H}_0$ mindestens die Ordnung $3840:120 = 2^5 = 32$. Die von $\mathfrak{H}_0$ auf U induzierte Permutationsgruppe $\mathfrak{Q} \cong \mathfrak{H}_0/\mathfrak{S}_0$ hat also mindestens die Ordnung 16. Da jedes $\pi \in \mathfrak{Q}$ die Punkte $p, q \in U$ mit $(p, q) \in Z$ entweder vertauscht oder festläßt, so hat andererseits $\mathfrak{Q}$ höchstens die Ordnung 32. Aus beiden Bemerkungen folgt: Die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ ist entweder 16 oder 32. Im ersten Falle ist $\mathfrak{P}^*$ isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_5$, im zweiten isomorph zur alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_5$ in 5 Ziffern. Jedenfalls folgt also

Satz 21. Die Kollineationsgruppe $\mathfrak{A}$ der Ausnahme-Ebene enthält die alternierende Gruppe in 5 Ziffern, ist also insbesondere nicht auflösbar.

³¹⁾ Dieses Ergebnis wurde im wesentlichen bereits in [4], Anhang II ohne Beweis angegeben.

³²⁾ Der durch σ_c auf F_9 induzierte Automorphismus $\bar{\sigma}_c$ hat die Form

$$\bar{\sigma}_c x = (x - xc) (-1 + c).$$

Es ist $\bar{\sigma}_c(c) = -c$, dagegen $\bar{\sigma}_{c \pm 1}(c) = -c \pm 1$.

³³⁾ Nicht, wie in [4], Anhang II angegeben, die Ordnung 3840.

Es ist jetzt auch leicht zu entscheiden, welcher der beiden oben genannten Fälle nun tatsächlich auftritt. Die Permutation, welche η auf U^* induziert, ist nämlich nach Ziffer 1 (vgl. den Beweis von Satz 17) eine Transposition, also ungerade. Somit ist $\mathfrak{P}^*$ isomorph zu $\mathfrak{S}_5$ und $\mathfrak{Q}$ hat die Ordnung 16, mithin $\mathfrak{H}_0$ die Ordnung 32. Ferner ist $\mathfrak{Q}$ abelsch vom Typus $(2, 2, 2, 2)$, denn jede nichtidentische Permutation aus $\mathfrak{Q}$ hat die Ordnung 2. Mithin enthält $\mathfrak{P}$ einen elementar-abelschen Normalteiler der Ordnung 16 mit einer zu $\mathfrak{S}_5$ isomorphen Faktorgruppe. Weitere einfache³⁴⁾ Gruppen treten also in $\mathfrak{P}$ und auch in $\mathfrak{A}$ nicht auf.

5. Wir wollen jetzt unter den Kollineationen aus $\mathfrak{A}$ die projektiven kennzeichnen, d. h. diejenigen, welche sich als Produkt von Perspektivitäten darstellen lassen. Wir beweisen den

Satz 22. *Eine Kollineation der Ausnahme-Ebene ist genau dann projektiv, wenn die von ihr auf den Punkten der uneigentlichen Geraden U induzierte Permutation gerade ist. Die Gruppe der projektiven Kollineationen ist ein Normalteiler vom Index 2 in der Gruppe aller Kollineationen.*

Beweis. (a) Zunächst zeigen wir, daß jede Perspektivität eine gerade Permutation auf U induziert. Eine Translation induziert auf U die identische Permutation, welche gerade ist. Sei nun π eine eigentliche Perspektivität. Deren Zentrum ist ein $p \in U$, und deren Achse geht durch ein $q \in U$ mit $(p, q) \in Z$. Nach Satz 17 können wir o. B. d. A. annehmen, daß $p = (\infty)$ und $q = (0)$ ist³⁵⁾. Dann ist $\pi = \bar{a}$ für ein $a \in F_9^\times$. Sei außerdem zunächst $a \neq \pm 1$. Dann induziert $\bar{a}$ auf U ein Produkt von zwei viergliedrigen Zyklen der Form $((b), (ba), (-b), (-ba))$ mit $b \neq 0$, also eine gerade Permutation. Ebenso induzieren $\bar{1}$ und $\overline{-1}$ gerade Permutationen, letztere wegen $\overline{-1} = \bar{a}^2$ und erstere, weil $\bar{1}$ die identische Kollineation ist. Jede Perspektivität, mithin also auch jede projektive Kollineation, induziert also auf U eine gerade Permutation.

(b) η induziert auf U nach Ziffer 1 den viergliedrigen Zyklus

$$((0), (1), (\infty), (-1)),$$

also eine ungerade Permutation. Wegen (a) können wir also sagen:

η ist nicht projektiv.

(c) Um die Umkehrung von (a) zu beweisen, beschränken wir uns auf Kollineationen aus $\mathfrak{A}_0$, was wir o. B. d. A. tun können wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{T}$, und weil jedes $\tau \in \mathfrak{T}$ auf U die Identität induziert.

Jede Kollineation aus $\mathfrak{A}_0$ ist projektiv, denn $\mathfrak{A}_0$ besteht genau aus den projektiven Kollineationen $a\bar{a}$, ε und $\overline{-1}$ sowie den Produkten daraus. Jedenfalls liegen diese Abbildungen in $\mathfrak{A}_0$; das sind aber bereits 32, so daß $\mathfrak{A}_0$ auch nicht mehr Kollineationen enthalten kann³⁶⁾. $\mathfrak{A}_0$ ist also eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{A}_0$ aller homogenen projektiven Kollineationen. $\mathfrak{A}_0$ liegt

³⁴⁾ „Einfach“ ist hier im Sinne von „einfach und nicht abelsch“ gemeint.

³⁵⁾ Mit (a) bezeichnen wir den uneigentlichen Punkt der Geraden $y = xa$ ($a \in F_9$), mit (∞) den uneigentlichen Punkt von $x = 0$, ganz entsprechend wie es in [4] geschieht ist.

³⁶⁾ Dies kann man auch leicht unter Zuhilfenahme von Satz 13 nachrechnen.

sogar echt in $\mathfrak{N}_0$, weil z.B. $\bar{a}$ in $\mathfrak{N}_0$, jedoch für $a \neq \pm 1$ nicht in $\mathfrak{N}_0$ liegt. $\mathfrak{N}_0$ ist Normalteiler in $\mathfrak{U}_0$ (vgl. [1], S. 180); dieser liegt sogar echt in $\mathfrak{U}_0$ wegen $\eta \notin \mathfrak{N}_0$.

Wir haben also $\mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{U}_0$ mit $\mathfrak{U}_0/\mathfrak{N}_0 \cong \mathfrak{P}^* \cong \mathfrak{S}_\varepsilon$ gezeigt. Hieraus folgt nach bekannten Sätzen der Gruppentheorie (vgl. [11], S. 54), daß $\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_0$ zu $\mathfrak{U}_5$ isomorph ist.

$\mathfrak{N}_0$ ist also Normalteiler von $\mathfrak{U}_0$ vom Index 2; und nun folgt sofort die Projektivität derjenigen Kollineationen, welche gerade Permutationen induzieren.

Man sieht jetzt auch leicht unter Zuhilfenahme von Satz 20, daß $\mathfrak{P}$ das Erzeugnis der Viererzyklen $(pqrs)$ mit zulässigen (p, r) und (q, s) ist³⁷⁾.

Literatur.

- [1] ANDRÉ, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954). — [2] BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942). — [3] GINGERICH, H. F.: Generalized fields and Desargues configurations. Abstract of a Thesis of the University of Illinois. Urbana, Ill. 1945. 12 S. — [4] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [5] KLINGENBERG, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **18**, 120—143 (1952). — [6] LENZ, H.: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Jber. DMV **57**, 20—31 (1954). — [7] LOMBARDO-RADICE, L.: Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici h - l -transitivi. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 24—29 (1954). — [8] PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. Math. **3**, 335—342 (1952). — [9] ZAPPA, G.: Sui piani grafici finiti h - l -transitivi. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 16—24 (1954). — [10] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [11] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Hamburger mathematische Einzelschriften, H. 21. Leipzig 1937.

³⁷⁾ $\mathfrak{P}$ ist nicht, wie in [4], Anhang II angegeben, der Zentralisator des Produktes aller Zyklen zulässiger Punktepaare. Denn läge dieses Produkt in $\mathfrak{P}$ und damit auch in $\mathfrak{Q}$, so auch jede Transposition (p, q) mit $(p, q) \in Z$. Dann hätte aber $\mathfrak{Q}$ die Ordnung 32 und nicht, wie hier gezeigt, die Ordnung 16.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 18. Dezember 1954.)

Darstellung analytischer Funktionen durch den Randwinkel des Bildbereiches.

Von

HERBERT MESCHKOWSKI.

I. Einleitung.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein einfach zusammenhängender schlichter Bereich mit stückweis stetiger Tangente in der ζ -Ebene. Ist $\zeta = \zeta(z)$ eine Funktion, die den Einheitskreis der z -Ebene schlicht auf $\mathfrak{B}$ abbildet, so ist bekanntlich (Literaturverzeichnis [I]) die Ableitung $\zeta'(z)$ so darstellbar:

$$(1) \quad \zeta'(z) = C \cdot e^{-\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log(1 - z \cdot e^{-i\vartheta}) d\psi(\vartheta)}.$$

Dabei ist $z = e^{i\vartheta}$ (auf dem Einheitskreis) und $\psi = \psi(\vartheta)$ der Randwinkel von $\mathfrak{B}$.

(1) wird unter Benutzung der Beziehung

$$(2) \quad \frac{d\psi}{d\vartheta} = u(e^{i\vartheta}) = \Re \left(1 + z \frac{\zeta''}{\zeta'} \right); \quad (|z| = 1)$$

aus dem Poissonschen Integral

$$(3) \quad f(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \cdot \Re f(e^{i\vartheta}) d\vartheta$$

abgeleitet. Eine solche Darstellung (1) ist auch dann noch möglich, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die Funktion $\zeta(z)$ auf ein Gebiet von „beschränkter Randdrehung“ abbildet. Das heißt: Der Grenzwert

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^\pi |u(re^{i\vartheta})| d\vartheta$$

soll endlich sein. Das Integral in (1) ist dann im Stieltjesschen Sinne zu verstehen.

Im folgenden sollen Verallgemeinerungen von (1) angegeben werden für mehrfach zusammenhängende Bereiche. Dieser Schritt liegt nahe, weil das Poissonsche Integral (3) für mehrfach zusammenhängende Bereiche verallgemeinert wurde [8]. Es zeigt sich aber, daß andere Voraussetzungen für die Ableitung von (1) nicht so ohne weiteres auf mehrfach zusammenhängende Bereiche übertragen werden können. Für zweifach zusammenhängende Bereiche (Ausgangsbereich ist der Kreisring) wird eine zu (1) analoge Darstellung angegeben, wobei die Voraussetzungen über das Randverhalten der zulässigen Funktionen aber noch nicht so allgemein gehalten werden können, wie das bei einfach zusammenhängenden Bereichen möglich ist.

Für mehr als zweifach zusammenhängende Bereiche wird eine Formel abgeleitet, in die die Richtung der Bildtangente (nicht die Richtungsänderung) eingeht.

II. Definitionen.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein beschränkter n -fach zusammenhängender schlichter Bereich, dessen Rand $\mathfrak{C}$ aus analytischen Kurvenbögen $\mathfrak{C}_v$ bestehen möge. $\mathfrak{C}_1$ sei die äußerste Randkomponente.

$A(z, u)$ und $B(z, u)$ seien die Funktionen, die $\mathfrak{B}$ so auf einen Parallelschlitzbereich mit Schlitten parallel zur reellen (imaginären) Achse abbilden, daß dabei der innere Punkt $z=u$ in ∞ übergeht (Residuum $+1$).

$r(z; u, v)$ und $k(z; u, v)$ heißen die Funktionen, die $\mathfrak{B}$ auf einen Radial- bzw. Kreisschlitzbereich abbilden, so daß u in 0 und v in ∞ übergeht (Residuum $+1$). Schließlich soll $E(z, u)$ die Funktion sein, die $\mathfrak{B}$ so auf einen „beschränkten Kreisschlitzbereich“ abbildet, daß $\mathfrak{C}_1$ in den äußeren Begrenzungskreis übergeht, u in 0 ($E'(u, u) = 1$).

Wir definieren nun wie [4]:

$$M(z, \bar{u}) = \frac{1}{2} (A(z, u) - B(z, u)), \\ N(z, u) = \frac{1}{2} (A(z, u) + B(z, u)).$$

Diese Funktionen können durch vollständige Orthonormalsysteme [6], [7] so dargestellt werden:

$$(4) \quad \begin{cases} M'(z, \bar{u}) = \frac{d}{dz} M(z, \bar{u}) = \pi \sum \varphi_v(z) \overline{\varphi_v(u)}, \\ N'(z, u) = \frac{d}{dz} N(z, u) = -\frac{1}{(z-u)^2} + \sum c_v(u) \varphi_v(z), \\ c_v(u) = \frac{1}{2i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{\varphi_v(z)} dz}{z-u}. \end{cases}$$

Aus diesen Darstellungen folgt unter anderem, daß $N'(z, u)$ analytisch ist auch in u , $M'(z, \bar{u})$ in $\bar{u}$.

Weiter setzen wir

$$P(z; u, v) = \frac{1}{2} (\log k(z; u, v) - \log r(z; u, v)), \\ Q(z; u, v) = \frac{1}{2} (\log k(z; u, v) + \log r(z; u, v)).$$

Dann gilt bekanntlich [4] für Randpunkte des Bereiches:

$$(5) \quad M'(z, \bar{u}) dz = \overline{N'(z, u)} d\bar{z}.$$

Die Verallgemeinerung von (3) lautet dann [8] so:

$$(6) \quad f'(u) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \Re f N'(z, u) d\bar{z}$$

¹⁾ Darunter verstehen wir einen Bereich, dessen Rand aus einem Kreis um den Nullpunkt und aus $n-1$ konzentrischen Kreisschlitten besteht, die im Innern des Vollkreises liegen.

oder in integrierter Form:

$$(7) \quad f(u) - f(v) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \Re f Q'(z; u, v) dz.$$

Für den Realteil einer analytischen Funktion gilt [8]:

$$(8) \quad \Re f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \Re f d \arg E(z, u).$$

III. Darstellung im Kreisring.

Sei jetzt $\mathfrak{R}_r$ der Kreisring mit den Kreisen vom Radius 1 bzw. $r < 1$ um den Nullpunkt der z -Ebene. $\zeta = \zeta(z)$ möge $\mathfrak{R}_r$ so abbilden, daß der Rand des Bildbereiches noch analytisch ist²⁾. Es sollen keine Verzweigungspunkte in $\mathfrak{R}_r$ auftreten, aber die Abbildung braucht nicht schlicht zu sein. Setzen wir

$$(9) \quad \begin{cases} f(z) = 1 + z \frac{\zeta''(z)}{\zeta'(z)}, \\ \Re f(z) = u(z), \end{cases}$$

dann gilt wieder [vgl. (2)] auf beiden Randkreisen

$$(10) \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = u(z).$$

Dabei ist ψ wieder die Richtung der Tangente im Bildgebiet, $\varphi = \arg z$.

Da $\zeta'(z) \neq 0$ vorausgesetzt wurde, ist $f(z)$ in $\mathfrak{R}_r$ analytisch, und es gilt nach der verallgemeinerten Poissonschen Integralformel (6)

$$f'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) N'(\xi, z) d\xi.$$

Wegen (5) und unter Benutzung der aus (4) sich ergebenden Beziehung $\overline{M'(\xi, \bar{z})} = M'(z, \bar{\xi})$ folgt daraus:

$$(11) \quad f'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) M'(z, \bar{\xi}) d\bar{\xi}.$$

Integration ergibt:

$$(12) \quad \frac{z \zeta''}{\zeta} = f(z) - 1 = f(z_0) - 1 - \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) (M(z, \bar{\xi}) - M(z_0, \bar{\xi})) d\bar{\xi}.$$

Setzt man nun

$$(13) \quad \lambda(z, \bar{\xi}) = \int_{z_0}^z \frac{M(t, \bar{\xi}) - M(z_0, \bar{\xi})}{t} dt,$$

so wird

$$(14) \quad \zeta'(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{f(z_0)-1} \cdot e^{-\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) \lambda(z, \bar{\xi}) d\bar{\xi}}.$$

²⁾ Wir werden später diese Voraussetzungen verallgemeinern.

Dabei ist $\zeta(z)$ durch die Vorschrift $\zeta'(z_0) = 1$ in dem (in $\mathfrak{R}_r$ frei wählbaren) Punkt z_0 normiert. Wenn es in $\mathfrak{R}_x$ einen Punkt z_0 gibt, für den $\zeta''(z_0) = 0$ gilt, dann vereinfacht sich (14), wenn man diesen Punkt z_0 als untere Grenze für die Integrationen wählt. Dann ist nämlich $f(z_0) - 1 = 0$.

Die durch (13) definierte Funktion $\lambda(z, \bar{\xi})$ kann als eine bekannte Gebietsfunktion angesehen werden. $M(z, \bar{\xi})$ kann ja durch die Reihenentwicklung (4) berechnet werden. Es ergibt sich für den Kreisring $\mathfrak{R}_r$ ([7], S. 86)³⁾:

$$M'(z, \bar{\xi}) = \frac{1}{\bar{\xi} z} \wp(\log z \bar{\xi} / 2\pi i, 2 \log r) + \frac{1}{\pi i} \zeta(\pi i).$$

Die Darstellung (14) gilt auch dann noch, wenn $\zeta(z)$ auf dem Rand nicht mehr regulär ist, aber $u(z) = \Re\left(1 + z \frac{\zeta''}{\zeta'}\right)$ auf dem Rand noch teilweise stetig ist. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die Verallgemeinerung der Poissonschen Integralformel auch noch gültig. Dagegen ist es nicht möglich, die Randwerte beliebig (abteilungsweise stetig) für $u(z)$ vorzuschreiben. (11) liefert dann und nur dann eine eindeutige analytische Funktion, wenn die vorgeschriebenen Randwerte den Bedingungsgleichungen

$$(15) \quad \int u(z) d\omega_v^*(z) = 0, \quad v = 1, 2$$

genügen [8]. Dabei ist $\omega_v(z)$ die zum harmonischen Maß $\omega_v(z)$ der Randkomponente $\mathfrak{C}_v$ konjugierte Potentialfunktion. Das hängt damit zusammen, daß die aus (7) sich für den Realteil ergebende Formel (8) auf die bekannte Formel

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) d\omega(\xi, z)$$

zurückgeführt werden kann, wenn (15) gilt. — Fassen wir zusammen:

Satz 1. *Es sei $\zeta = \zeta(z)$ eine im Kreisring $r < |z| < 1$ reguläre Funktion, $u(\xi) = \frac{d\psi(\xi)}{d\varphi}$ sei auf dem Rand des Ringes noch abteilungsweise stetig. Dabei ist*

$$\psi = \arg d\psi(\xi),$$

$$\varphi = \arg \xi \quad \text{für} \quad |\xi| = r \quad \text{und} \quad |\xi| = 1.$$

Dann gilt

$$(16) \quad \zeta(z) - \zeta(z_0) = \int_{z_0}^z \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{(z_0)-1} \cdot e^{-\frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{C}} u(\xi) \lambda(\omega, \bar{\xi}) d\bar{\xi}} \cdot d\omega,$$

wobei $\lambda(\omega, \bar{\xi})$ die durch (13) definierte Funktion ist. Ist umgekehrt in (16) für $u(\xi)$ eine abteilungsweise stetige Funktion vorgegeben, die den Randbedingungen (15) genügt, so ist die durch (16) definierte Funktion $\zeta(z)$ im Kreisring eindeutig und analytisch. In allen Stetigkeitspunkten von $u(\xi)$ hat dann

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \Re\left(1 + z \frac{\zeta''}{\zeta'}\right)$$

die vorgegebenen Randwerte $u(\xi)$.

³⁾ In dieser Formel ist $\zeta(\log z \bar{\xi})$ das bekannte Integral der ζ -Funktion, nicht etwa unsere Abbildungsfunktion $\zeta(z)$!

PAATERO hat in seiner ersten Arbeit [1] Beispiele angegeben, wie man Funktionen aus der vorgegebenen Randdrehung darstellen kann. Im Prinzip ist also das auch [unter Berücksichtigung der Bedingungen (15)] im Kreisring möglich. Nur wird die praktische Durchführung hier erheblich schwieriger (vgl. (13) und [7], S. 86).

IV. Darstellung in n -fach zusammenhängenden Bereichen.

Die Ergebnisse für den Kreisring können nicht ohne weiteres auf Bereiche von höherem Zusammenhang übertragen werden. Wählt man etwa für $n > 2$ einen Vollkreisbereich als Normalbereich, so gilt (2) nicht mehr auf allen Randkreisen.

Diese Schwierigkeit tritt nicht auf, wenn man von einem beschränkten Kreisschlitzbereich (s. Abschnitt II) ausgeht. In diesem Fall haben aber die beteiligten Funktionen im allgemeinen an den Endpunkten des Schlitzes Singularitäten.

Es ist aber durch eine geringe Variation der Problemstellung möglich, die Betrachtungen vom Abschnitt III sogar auf beliebige, von n analytischen Kurven begrenzte Bereiche zu übertragen.

Es sei also $\mathfrak{B}$ ein von n analytischen Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ ($\nu = 1 \dots n$) begrenzter schlichter Bereich, ζ_1 sei die äußerste Randkurve. $\zeta(z)$ sei eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion, und auch $\log \zeta'(z)$ soll in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig und auf dem Rand noch abteilungsweise stetig sein. Schließlich sei für einen festen Punkt $u_0 \in \mathfrak{B}$: $\zeta'(u_0) = 1$. Setzt man

$$\Re \left(\frac{1}{i} \log \zeta' \right) = \arg \zeta'(z) = v(z),$$

so wird nach (7):

$$(17) \quad \zeta(u) - \zeta(u_0) = \int_{u_0}^u e^{\frac{1}{\pi} \int v(z) Q'(z; t, u_0) dz} dt.$$

Damit ist eine Darstellung gewonnen, bei der nicht $d\psi/d\varphi$, sondern

$$(18) \quad v = \varphi - \arg dz = \arg \frac{d\zeta}{dz} = \Im \log \zeta'(z)$$

benutzt wird. v ist bekannt, wenn der Originalbereich und die Richtung der Bildtangente gegeben ist. Wir haben also:

Satz 2. *Es sei $\zeta(z)$ eine in einem beschränkten von n analytischen Kurven begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ definierte eindeutige analytische Funktion, $\log \zeta'(z)$ sei in $\mathfrak{B}$ ebenfalls analytisch und eindeutig, auf dem Rand noch abteilungsweise stetig, $\zeta'(u_0) = 1$ für einen festen Punkt $u_0 \in \mathfrak{B}$. Dann ist $\zeta(u)$ durch (17) darstellbar, wobei $v(z)$ durch (18) definiert ist.*

Ist umgekehrt für $v(z)$ eine abteilungsweise stetige Randfunktion vorgegeben, die den Bedingungen

$$\int_{\mathfrak{C}_\nu} v(z) d\omega_\nu^*(z) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

genügt, so ist die durch (17) dargestellte Funktion $\zeta(u)$ in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig, $\psi - \arg dz = \arg \frac{d\zeta}{dz} = \Im \log \zeta'(z)$ hat dann in allen Stetigkeitspunkten von $v(z)$ die vorgegebenen Randwerte.

Literatur.

[1] PAATERO, V.: Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **33**, Nr. 9 (1931). — [2] PAATERO, V.: Über Gebiete von beschränkter Randdrehung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **37** Nr. 9 (1933). — [3] PAATERO, V.: Über die konforme Abbildung mehrblättriger Gebiete von beschränkter Randdrehung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **128** (1952). — [4] GARBEDIAN and SCHIFFER: Identities in the theory of conformal mapping. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65**, 187—238 (1949). — [5] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953. — [6] MESCHKOWSKI, H.: Verzerrungssätze für mehrfach zusammenhängende Bereiche. *Compositio Math.* **11**, 44—59 (1953). — [7] MESCHKOWSKI, H.: Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme. *Math. Ann.* **127**, 107—129 (1954). — [8] MESCHKOWSKI, H.: Verallgemeinerungen der Poissonschen Integralformel auf mehrfach zusammenhängende Bereiche. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **166** (1954).

Berlin-Dahlem, Thielallee 66.

(Eingegangen am 3. November 1954.)

Some class number relations.

By

LEONARD CARLITZ.

Apart from the well-known class number formulas due to KRONECKER and others (for references see [2; Chapter 6]), there is another type which apparently has not been explicitly stated. The object of this note is to give several instances of such results. (For class number formulas of another kind, see [1].)

Let as usual

$$\vartheta_3(q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \quad \vartheta_0(q) = \vartheta_3(-q), \quad \vartheta_2(q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(2n+1)^2}.$$

Then if $F(n)$ and $E(n)$ have their standard meaning, KRONECKER [5] has proved the following four formulas.

$$(1) \quad 4 \sum_0^{\infty} F(4n+2) q^n = q^{-\frac{1}{2}} \vartheta_2^2(q) \vartheta_3(q),$$

$$(2) \quad 4 \sum_0^{\infty} F(4n+1) q^n = q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_2(q) \vartheta_3^2(q),$$

$$(3) \quad 8 \sum_0^{\infty} F(8n+3) q^{2n} = q^{-\frac{3}{4}} \vartheta_2^3(q),$$

$$(4) \quad 12 \sum_0^{\infty} E(n) q^n = \vartheta_3^3(q).$$

HURWITZ [4] has derived the following additional set of formulas

$$(5) \quad 2 \sum_0^{\infty} F(8n+2) q^n = q^{-\frac{1}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_3(q) \vartheta_3(q^2),$$

$$(6) \quad 2 \sum_0^{\infty} F(8n+6) q^n = q^{-\frac{3}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_3(q) \vartheta_2(q^2),$$

$$(7) \quad 4 \sum_0^{\infty} F(8n+1) q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_3^2(q^2),$$

$$(8) \quad 4 \sum_0^{\infty} F(8n+5) q^{2n} = q^{-\frac{3}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_2^2(q^2),$$

$$(9) \quad 2 \sum_0^{\infty} F(16n+2) q^{2n} = q^{-\frac{1}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_3(q^2) \vartheta_3(q^4),$$

$$(10) \quad 2 \sum_0^{\infty} F(16n+10) q^{2n} = q^{-\frac{5}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_3(q^2) \vartheta_2(q^4),$$

$$(11) \quad 2 \sum_0^{\infty} F(16n+6) q^{2n} = q^{-\frac{3}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_2(q^2) \vartheta_3(q^4),$$

$$(12) \quad 2 \sum_0^{\infty} F(16n+14) q^{2n} = q^{-\frac{7}{2}} \vartheta_2(q) \vartheta_2(q^2) \vartheta_2(q^4).$$

On the other hand if $R_{r,s}(n)$ denotes the number of representations of n as a sum of r odd and s even squares, then GLAISHER [3; page 10] has proved

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{0,6}(4n) = 4 \{4E'_2(n) - E_2(n)\}, \\ R_{1,5}(4n+1) = 6 \{E_2(4n+1) + \chi_2(4n+1)\}, \\ R_{2,4}(4n+2) = (-1)^n 60 E_2(2n+1), \\ R_{3,3}(4n+3) = -20 E_2(4n+3), \\ R_{4,2}(4n) = 240 E'_2(n), \\ R_{5,1}(4n+1) = 6 \{E_2(4n+1) - \chi_2(4n+1)\}, \\ R_{0,6}(8n+6) = -8 E_2(4n+3). \end{array} \right.$$

In these formulas $E_2(n)$ denotes the sum of the squares of the divisors of n which are of the form $4k+1$ diminished by the sum of the squares of the divisors of n which are of the form $4k+3$; $E'_2(n)$ denotes the sum of the squares of the divisors of n whose conjugates are of the form $4k+1$, diminished by the sum of the squares of the divisors of n whose conjugates are of the form $4k+3$; $\chi_2(m)$, where m is odd, denotes the sum of the squares of the primary Gaussian integers of norm m . Also if we put

$$(14) \quad \vartheta_2^r(q) \vartheta_3^s(q) = \sum_n R'_{r,s}(n) q^{\frac{1}{2}n},$$

then

$$(15) \quad R_{r,s}(n) = \binom{r+s}{r} R'_{r,s}(n).$$

The most immediate class number formulas of the type we wish to indicate are obtained from (3) and (4). We get using the first and last of (13)

$$(16) \quad 8 \sum_{i+j=n} F(8i+3) F(8j+3) = -E_2(4n+3),$$

$$(17) \quad 36 \sum_{i+j=n} E(i) E(j) = 4E'_2(n) - E_2(n).$$

On the other hand, multiplying corresponding members of (3) and (4) leads to

$$(18) \quad 96 \sum_{2i+j=n} F(8i+3) E(j) = -E_2(4n+3).$$

Similarly (1) and (2) yield

$$(19) \quad \sum_{i+j=n} F(4i+2) F(4j-2) = E'_2(n),$$

$$(20) \quad 4 \sum_{i+j=n} F(4i+1) F(4j+1) = (-1)^n E_2(2n+1),$$

$$(21) \quad 16 \sum_{i+j=n} F(4k+2) F(4i+1) = -E_2(4n+3).$$

Combining (1) and (3) gives

$$(22) \quad 32 \sum_{i+2j=n} F(4i-2) F(8j+3) = E_2(4n+1) - \chi_2(4n+1),$$

while (2) and (3) yield

$$(23) \quad 2 \sum_{i+2j=n} F(4i-3) F(8j+3) = E'_2(n);$$

similarly (1), (2) and (4) give

$$(24) \quad 12 \sum_{i+j=n} F(4i+2) E(j) = (-1)^n E_2(2n+1),$$

$$(25) \quad 48 \sum_{i+j=n} F(4i+1) E(j) = E_2(4n+1) + \chi_2(4n+1).$$

Turning next to the Hurwitz formulas, (5), ..., (12), we recall that

$$\vartheta_2^2(q) = 2 \vartheta_2(q^2) \vartheta_3(q^2).$$

Thus for example if we multiply (5) and (6), the right member

$$= q^{-1} \vartheta_2^2(q) \vartheta_3^2(q) \vartheta_2(q^2) \vartheta_3(q^2) = \frac{1}{2} q^{-1} \vartheta_2^4(q) \vartheta_3^2(q).$$

Consequently we get

$$(26) \quad \sum_{i+j=n} F(8i+2) F(8j-2) = 2E'_2(n).$$

Similarly (7) and (8) imply

$$(27) \quad 4 \sum_{i+j=n} F(8i+1) F(8j+5) = -E_2(4n+3).$$

If we multiply (9) and (10), the right member

$$= \frac{1}{2} q^{-\frac{5}{2}} \vartheta_2^2(q) \vartheta_3^2(q^2) \vartheta_2^2(q^2) = \frac{1}{8} q^{-\frac{5}{2}} \vartheta_2^6(q);$$

we therefore get

$$(28) \quad 4 \sum_{i+j=n} F(16i+2) F(16j+10) = -E_2(4n+3).$$

Again (11) and (12) yield

$$\begin{aligned} & 4 \sum_0^\infty F(16n+6) q^{2n} \sum_0^\infty F(16n+14) q^{2n} \\ &= \frac{1}{4} q^{-\frac{5}{2}} \vartheta_2^2(q) \vartheta_2^4(q^2) = \frac{1}{2} q^{-\frac{5}{2}} \vartheta_2^5(q^2) \vartheta_3(q^2), \end{aligned}$$

which implies

$$(29) \quad 8 \sum_{i+j=n} F(16i+6) F(16j-2) = E_2(4n+1) - \chi_2(4n+1).$$

Finally combining (9) and (2) gives

$$(30) \quad \sum_{i+j=n} F(16i+2) F(16j-2) = 4E'_2(n),$$

while (10) and (11) imply

$$(31) \quad \sum_{i+j=n} F(16i+6) F(16j-6) = 4E'_2(n).$$

References.

- [1] BELL, E. T.: A new type of class number relations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **26**, 446—450 (1924). — [2] DICKSON, L. E.: *History of the theory of numbers*, vol. 3. Washington 1923. — [3] GLAISHER, J. W. L.: On the representation of a number as the sum of two, four, six, eight, ten, and twelve squares. *Quart. J. Math.* **38**, 1—62 (1907). — [4] HURWITZ, A.: Über die Anzahl der Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. *J. reine angew. Math.* **99**, 165—168 (1886) (*Mathematische Werke*, vol. 2, pp. 68—71, Basel 1933). — [5] KRONECKER, L.: Über quadratischen Formen von negativer Determinante. *Monatsber. Akad. Wiss. Berlin* **1875**, 223—236 (*Werke*, vol. 4, pp. 247—259, Leipzig and Berlin 1929).

Dept. of Math., Duke University, Durham N.C. (USA.).

(Eingegangen am 19. Dezember 1954.)

The identities of — and unique subdirect factorization within — classes of universal algebras.

By

ALFRED L. FOSTER.

1. Introduction.

A universal algebra $\mathfrak{A} = (P, o, \dots)$, whose primitive operations are $o, \dots$ operating in the class P of elements, is called *primal* if it is (1°) *functionally strictly complete*¹⁾ and (2°) of order > 1 .

Among the results established in [1] and [2]²⁾—which articles are basic forerunners of the present communication—we recall the fundamental

Theorem 1.1. *Let $\mathfrak{A}$ be a primal universal algebra. Then the following four classes of algebras are pairwise coextensive, up to isomorphisms:*

(1) *The class of universal algebras (of the same species as $\mathfrak{A}$) which satisfy all strict identities³⁾ satisfied by $\mathfrak{A}$.*

(2) *The class of all subalgebras of direct powers of $\mathfrak{A}$.*

(3) *The class of all subdirect powers of $\mathfrak{A}$.*

(4) *The class of all normal subdirect powers of $\mathfrak{A}$ ⁴⁾.*

With the algebra $\mathfrak{A}$ variously chosen as (i) the 2-element Boolean algebra F_2 , (ii) the field F_p , (iii) the field F_{p^k} (= G.F. of p^k elements), (iv) the basic post algebra P_n , theorem 1 respectively specializes to corresponding known structure theorems for Boolean rings, p -rings, p^k -rings and general Post algebras. These and various other specializations of $\mathfrak{A}$, for instance the so-called n -field F_n , are incorporated in the papers [1] and [2].

¹⁾ That is if for any integer k ($1 \leq k < \infty$) each mapping $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ of the set $P \times P \times \dots \times P$ (k th direct product) into the set P may be expressed in at least one way as a strict $\mathfrak{A}$ -function, i.e., as some composition (via the primitive operations $o, \dots$) of indeterminates $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ over P . The order (= number of elements) of a functionally complete algebra is necessarily finite (= finite algebra).

²⁾ Here and throughout, [1] and [2] respectively refer to the two papers: FOSTER, *Generalized "Boolean" theory of universal algebras, I: Subdirect sums and normal representation theorem*, Math. Z. **58** (V), 306—336 (1953), and *II: Identities and subdirect sums of functionally complete algebras*, Math. Z. **59** (V), 191—199 (1953). Additional references are given in the bibliography of these papers.

³⁾ A strict identity $\mathfrak{f}(\xi, \dots) = \mathfrak{G}(\xi, \dots)$ of a universal algebra is an identity in which both $\mathfrak{f}$ and $\mathfrak{G}$ are strict functions (see earlier footnote).

⁴⁾ Contrary to the agreement in force in [1] and [2], we here admit $\bar{1}$, the one-element algebra, among the direct (and therefore subdirect) powers of $\mathfrak{A}$ (see § 5). With this understanding and with the observation that $\bar{1}$ satisfies all possible identities, theorem 1 as given above is immediately seen to be equivalent to the corresponding theorem as formulated in [2].

In the present paper we offer a considerable extension of basic results obtained in [1] and [2],—a generalization dealing with certain *families* $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_i\}$ of primal universal algebras $\mathfrak{P}_i$. (The $\mathfrak{P}_i \in \tilde{\mathfrak{P}}$ are of course all of the same species). An admissible family, $\tilde{\mathfrak{P}}$, will subsequently be called a *primal cluster*. While it is not feasible in this introductory paragraph to define the above and other pertinent concepts, in the interest of a preliminary orientation we shall nevertheless here state a partial version of one of the basic results which we shall obtain,

Theorem 1.2. *Let $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_i\}$ be a primal cluster of universal algebras, and let $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ be a finite subset of the $\mathfrak{P}_i \in \tilde{\mathfrak{P}}$. Then the following three classes of algebras are pairwise coextensive, up to isomorphisms:*

(i) *The class of universal algebras (of the same species as $\tilde{\mathfrak{P}}$) which satisfy all strict identities common to $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$, or, otherwise stated, which satisfy all strict identities of the algebra*

$$\mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{i_n} \quad (\text{direct product})$$

(ii) *The class of all subalgebras of algebras which are directly (i.e. direct product) representable by means of $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$.*

(iii) *The class of all algebras which are subdirectly representable by means of $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ ⁵⁾.*

We shall also establish the uniqueness of this representation within a given cluster, namely

Theorem 1.3. *If an algebra $\mathfrak{A}$ belongs to one (and hence to each) of the three classes (i), (ii), (iii) of theorem 1.2 and if $\mathfrak{A} \neq \bar{}$ ($=$ one-element algebra), then $\mathfrak{A}$ possesses one and only one set $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ of "primal factors" in the cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

2. Independent algebras.

Throughout this communication we shall be concerned with certain classes of universal algebras, all of the same species Sp . While not everywhere essential, we shall find it convenient, unless otherwise specified, to assume that Sp contains, among its primitive operations, at least one which is not a unary operation⁶⁾. We shall further understand, even though not usually explicitly noted, that the identity operation $e (= e(\xi)$, or frequently denoted simply by ξ itself) is to be regarded as one of the primitive operations of each universal algebra, and hence of each species Sp .

Subject to the above, the species Sp may be chosen in an arbitrary manner, but is then to be kept fixed.

⁵⁾ In (ii) and (iii) the direct, respectively subdirect products and powers of $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ are of unrestricted cardinality.

⁶⁾ Since any composition of unary operations is again unary it follows, in particular, that the species Sp of any primal algebra, $\mathfrak{P}$, must necessarily contain at least one non-unary primitive operation.

By an *expression* $\Phi(\xi, \dots)$ of species $S\phi$ we mean simply a finite set of one or more indeterminate-symbols ξ, η , etc. composed by means of the primitive operation-symbols of $S\phi$. In each given algebra $\mathfrak{A}$ of species $S\phi$ such an expression Φ represents a particular strict $\mathfrak{A}$ -function (see earlier footnote),—the operation-symbols now being identified with the primitive operations of $\mathfrak{A}$ and the indeterminate-symbols identified as indeterminates over $\mathfrak{A}$ ⁷).

If Φ and Ψ are expressions of species $S\phi$ and if $\mathfrak{A}$ is an algebra of species $S\phi$, then the notation $\Phi = \Psi(\mathfrak{A})$, also $\Phi = \Psi \pmod{\mathfrak{A}}$, also $\Phi = \Psi(\mathfrak{A})$ (read: Φ congruent $\Psi \pmod{\mathfrak{A}}$) shall denote simply that $\Phi = \Psi$ is an identity (in fact a strict identity) of the algebra $\mathfrak{A}$. Similarly $\Phi \neq \Psi$ (or $\Phi \neq \Psi \pmod{\mathfrak{A}}$) denotes a non-identity in $\mathfrak{A}$.

Let now $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}$ be a class of algebras of species $S\phi$. We shall call the class (*strictly*) *independent* if, corresponding to each set $\{\Phi_i\}$ of expressions of species $S\phi$, there exists at least one expression X such that

$$(2.1) \quad \Phi_i = X(\mathfrak{A}_i), \quad (\mathfrak{A}_i \in \tilde{\mathfrak{A}})^8).$$

A (*strictly*) *dependent* class is one which is not independent.

The following observations are immediate consequences of the definition of independence: (a) $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ (= single algebra) is always independent. (b) If $\tilde{\mathfrak{A}}$ is an independent class so is every subset of $\tilde{\mathfrak{A}}$. (c) If $\tilde{\mathfrak{A}}$ is independent so is $\tilde{\mathfrak{A}}'$, where $\tilde{\mathfrak{A}}' = \tilde{\mathfrak{A}}$ augmented by $\circ$, the one element algebra. (d) If $\mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_2$ (isomorphism) and if $\mathfrak{A}_1 \neq \circ$, then $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{A}_2$ are dependent.

Lemma 2.1. (1) If $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}$ is an independent class of algebras of species $S\phi$ and if $\mathfrak{A}_i \neq \circ$ for all $\mathfrak{A}_i \in \tilde{\mathfrak{A}}$, then $\tilde{\mathfrak{A}}$ is a finite class, $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$. (2) A necessary and sufficient condition for a finite class $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$ to be independent is that there exist an expression $K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ of species $S\phi$ such that

$$(2.2) \quad \begin{cases} \xi_1 (= e(\xi_1)) = K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) & (\pmod{\mathfrak{A}_1}) \\ \xi_2 & = K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) & (\pmod{\mathfrak{A}_2}) \\ \vdots & \vdots \\ \xi_n & = K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) & (\pmod{\mathfrak{A}_n}). \end{cases}$$

Proof of (1). In the definition of independence take the Φ_k to be the expressions $\xi_k (= e(\xi_k))$. Then there exists an expression X such that

$$e(\xi_k) = X(\mathfrak{A}_k) \quad (\mathfrak{A}_k \in \tilde{\mathfrak{A}}).$$

⁷ It is to be emphasized that $\Phi(\xi, \dots)$ and $\Phi(\eta, \dots)$ are different expressions even though, in each algebra $\mathfrak{A}$, they represent the same self-mapping. In particular ξ and η [that is $e(\xi)$ and $e(\eta)$] are different expressions.

⁸ The formal similarity between the concept of independence and the Chinese residue theorem of elementary number theory is apparent. Indeed it may be shown that the latter is actually equivalent to a particular realization of the condition of independence.

X can have only a finite number, say n , of arguments, $X = X(\xi_1, \dots, \xi_n)$. It then follows that $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$, for if $\mathfrak{A}_{n+1}$ were $\in \mathfrak{A}$ we should have

$$\xi_{n+1} = X(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (\mathfrak{A}_{n+1}).$$

Since $\mathfrak{A}_{n+1} \neq \emptyset$ such an identity is patently impossible.

Proof of (2). The necessity part follows from the definition of independence by again choosing the Φ_k as ξ_k , as in part (1) above; K is then the X of (2.1) demanded by the definition. The sufficiency part of (2) follows, since if such a K exists and if $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ are now any given expressions, then if X is the expression defined by

$$X = \text{def} = K(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$$

clearly, by insertion in (2.2) we have

$$\Phi_k = X \pmod{\mathfrak{A}_k}, \quad (\mathfrak{A}_k \in \mathfrak{A}).$$

The lemma is thus established.

3. Algebras of class f ; coframal algebras.

We shall first define a modification of the concept "of class f " introduced in [1], [2]. A universal algebra $\mathfrak{A} = (A, o, \dots)$ will be called *strictly of class f* if it possesses a *strict frame* $(A, \times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}) = (A, \times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}; 0, 1)$, that is: if it possesses a pair of elements $0, 1$ ($0 \neq 1$) and three strict $\mathfrak{A}$ -functions $\times$ (binary), $\overset{\circ}{\cap}$ (unary) and $\overset{\circ}{\cup}$ (unary) such that (1) ξ° and $\xi^\cup$ are both permutations (i.e., $1-1$ self mappings) of the class A , with $\overset{\circ}{\cup}$ the inverse of $\overset{\circ}{\cap}$; (2) $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$, $1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi$, $0^\circ = 1$ (for all $\xi \in A$), and (3) 0 (conceived as a constant function) may be expressed as some strict $\times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}$ function, i.e., as some $\times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}$ composite of one or more indeterminates $\xi, \dots$ over the set A . Since $1 = 0^\circ$ it follows that 1 may then also be expressed as a strict $\times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}$ function.

Of the many familiar and other algebras which are strictly of class f (see [1], [2]) we here merely recall that each primal algebra $\mathfrak{P} = (P, o, \dots)$ —see § 1—is of this class. Indeed in this primal case if $0, 1$ ($0 \neq 1$) are *any* pair of elements of $\mathfrak{P}$ there always exists at least one triple $\times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}$ of strict $\mathfrak{P}$ -functions such that $(P, \times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}; 0, 1)$ is a strict frame in P , with $0, 1$ as null and identity elements.

Let now $\{\mathfrak{A}_i\}$ be a class of algebras $\mathfrak{A}_i = (A_i, o, \dots)^9$, all of the same species Sp . We shall call the class (*strictly*) *coframal* if there exist three expressions $\times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}$ of species Sp and elements $0_i, 1_i$ of $\mathfrak{A}_i$ such that $(A_i, \times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}) = (A_i, \times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}; 0_i, 1_i)$ is a strict frame in $\mathfrak{A}_i$, for each $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$. It is to be emphasized that the *same* three expressions $\times, \overset{\circ}{\cap}, \overset{\circ}{\cup}$ are here required to simultaneously serve as "frame functions" (or "co-frame") in each $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$. For emphasis a coframal class of algebras might also be called *uniformly coframal*, in contradistinction, for instance, with a merely pairwise coframal class.

⁹ We shall generally avoid the more cumbersome notation $(A_i, o_i, \dots)$ in favor of the simpler one $(A_i, o, \dots)$; the meaning or interpretation of each of the primitive operations $o, \dots$ of the species Sp will of course depend on i , that is, on the choice of $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$.

Theorem 3.1. Let $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \circ, \dots)$, $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \circ, \dots)$ be two algebras of the same species Sp , and each strictly of class f . For $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ to be strictly independent it is sufficient that they be coframal, say with the coframes $(A_1, \times, \overset{\circ}{\circ}, \overset{\circ}{\circ}; 0_1, 1_1)$, $(A_2, \times, \overset{\circ}{\circ}, \overset{\circ}{\circ}; 0_2, 1_2)$, and that there exist two strict expressions of species Sp , $|'(\xi)$ and $||''(\xi)$ such that

$$(3.1) \quad \begin{cases} |'(\xi) \begin{cases} \equiv 1_1(\mathfrak{A}_1) \\ \equiv 0_2(\mathfrak{A}_2) \end{cases} \\ ||''(\xi) \begin{cases} \equiv 0_1(\mathfrak{A}_1) \\ \equiv 1_2(\mathfrak{A}_2) \end{cases} \end{cases}$$

Proof. Let the expression $\xi \times_{\circ} \eta$ be the $\circ$ -transform of $\times$, i.e.,

$$(3.2) \quad \xi \times_{\circ} \eta = \text{def} = (\xi^{\circ} \times \eta^{\circ})^{\circ}.$$

If now the expression $K(\xi, \eta)$ is defined by

$$(3.3) \quad K(\xi, \eta) = \text{def} = \{\xi \times |'(\xi)\} \times_{\circ} \{\eta \times ||''(\eta)\},$$

it is seen that

$$(3.4) \quad K(\xi, \eta) \begin{cases} = \xi(\mathfrak{A}_1) \\ = \eta(\mathfrak{A}_2) \end{cases}.$$

The theorem then follows from part 2 of lemma 2.1.

We shall now extend theorem 3.1 to a finite class of algebras by

Theorem 3.2. Let $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$ ($n > 0$) be a finite class of universal algebras $\mathfrak{A}_i = (A_i, \circ, \dots)$ of the same species Sp , and each strictly of class f . For $\tilde{\mathfrak{A}}$ to be a strictly independent class it is sufficient that the $\mathfrak{A}_i$ possess a strict coframe $(A_i, \times, \overset{\circ}{\circ}, \overset{\circ}{\circ}; 0_i, 1_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) and that for each pair of integers i, j ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$) there exist an expression $|_{ij}(\xi)$ of species Sp such that

$$(3.5) \quad |_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{A}_j} \end{cases}.$$

Proof. For $n=2$ theorem 3.2 becomes identical with theorem 3.1, with

$$\begin{aligned} |_{12} &= |'(\xi) \\ |_{21} &= ||''(\xi). \end{aligned}$$

For arbitrary n , let us now define n expressions $|^{(i)}(\xi)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) as follows:

$$(3.6) \quad |^{(i)}(\xi) = \text{def} = \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{j=n} |_{ij}(\xi) = |_{i1}(\xi) \times |_{i2}(\xi) \times \dots \times |_{in}(\xi), \quad (\text{no } |_{ii} \text{ term}).$$

Here $\times$ is the $\times$ of the coframe, and for definiteness we shall assume $\times$ associated from the left,

$$(3.7) \quad \prod |_{ij}(\xi) = ((|_{i1}(\xi) \times |_{i2}(\xi)) \times |_{i3}(\xi)) \times \dots \quad (j \neq i).$$

It is then readily seen that the expressions $|^{(i)}(\xi)$ of species Sp satisfy

$$(3.8) \quad |^{(i)}(\xi) = \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{A}_j} \text{ for } j \neq i \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Let now the expression $K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ be defined by

$$(3.9) \quad \begin{cases} K(\xi_1, \dots, \xi_n) = \text{def} = (\xi_1 \times |^{(1)}(\xi)) \times_{\circ} (\xi_2 \times |^{(2)}(\xi)) \times_{\circ} \dots \times_{\circ} (\xi_n \times |^{(n)}(\xi)) \\ = \sum_{\circ} (\xi_i \times |^{(i)}(\xi)). \end{cases}$$

Here $\times_{\circ}$ is the $\circ$ -transform of the $\times$ belonging to the coframe [see (3.2)], and in the $\sum_{\circ}$ -sum (3.9) the terms $\xi_i \times |^{(i)}(\xi)$ are again to be associated from the left. An easy computation then shows that

$$K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv \xi_i \pmod{\mathfrak{A}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

whence the proof is complete, by lemma 2.1.

In an important class of cases, by means of theorem 3.2 the difficult notion of independence may largely be made to depend on the simpler one of pairwise independence. We have

Theorem 3.3. *Let $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n\}$ be a finite class of primal algebras $\mathfrak{P}_i = (P_i, \circ, \dots)$, all of the same species Sp . A sufficient (and necessary) condition for $\mathfrak{P}$ to be a strictly independent class is that: (1°) $\mathfrak{P}$ be strictly coframal, and (2°) $\mathfrak{P}$ be pairwise strictly independent.*

Proof. The necessity of the conditions is an immediate consequence of the definition of independence, or one may refer ahead to theorem 3.4. Consider then the sufficiency. Let $\times, \circ, \cup$ be coframal expressions in $\mathfrak{P}$, whence $(P_i, \times, \circ, \cup; 0_i, 1_i)$ is a strict frame in $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Since the $\mathfrak{P}_i$ are primal and therefore functionally strictly complete, and since for $i \neq j$ $\mathfrak{P}_i$ and $\mathfrak{P}_j$ are strictly independent, the existence of expressions $|_{ij}(\xi)$ of species Sp is assured, where

$$|_{ij}(\xi) = \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{P}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{P}_j} \end{cases} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n).$$

The proof is then complete on use of theorem 3.2.

While a coframal class of algebras is generally not independent, nor even pairwise independent, for the converse we readily have

Theorem 3.4. *Let $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_i\}$ be a class of algebras of the same species Sp , and each strictly of class f . Moreover let $\mathfrak{A}$ be strictly independent. Then the class $\mathfrak{A}$ is finite and strictly coframal.*

Proof. $\mathfrak{A}$ must be finite, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n\}$, by lemma 2.1, since an algebra of class f cannot be isomorphic with $\circ$. Now if $(A_i, \times_i, \circ_i, \cup_i; 0_i, 1_i)$ is a strict frame in $\mathfrak{A}_i$, from the independence of $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ it follows that a single triplet $\times, \circ, \cup$ of expressions of species Sp exists such that

$$\begin{aligned} \xi \times \eta &= \xi \times_i \eta \\ \xi^{\circ} &= \xi^{\circ_i} \pmod{\mathfrak{A}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \\ \xi^{\cup} &= \xi^{\cup_i} \end{aligned}$$

The theorem is thus established.

4. Primal clusters.

By a *cluster* of universal algebras of given species Sp we mean a class of algebras of species Sp any finite subset of which is strictly independent. Any subset of a cluster is then again a cluster.

By a *primal cluster* we mean a cluster whose elements (i.e., member algebras) are all primal algebras (§ 1). As an indication of the range of application of the structure theorems eventually to be proved, we shall now exhibit several important examples of this concept.

To this end we recall from [1], [2] that for each integer n ($n > 1$) the " n -field" $\mathcal{F}_n = (F_n, \times, \circ) = (F_n, \times, \circ, \circ^{\circ})$ is functionally strictly complete and hence primal. Here $F_n = \{0, 1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-2}\} = \{\dots, \xi, \dots\}$, in which $(F_n, \times)$ is the cyclic group of order $n - 1$, augmented by a null element, 0:

$$(4.1) \quad \left. \begin{aligned} \lambda^{n-1} &= 1 \\ 0 \times \xi &= \xi \times 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\xi \in F_n),$$

and where $\circ$ is the cyclic "successor" permutation

$$(4.2) \quad 0^{\circ} = 1, 1^{\circ} = \lambda, \lambda^{\circ} = \lambda^2, \dots, (\lambda^{n-2})^{\circ} = 0,$$

with $\circ^{\circ}$ the inverse of $\circ$ ¹⁰). We shall now prove

Theorem 4.1. $\tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_n\} (n = 2, 3, \dots)$, the class of all n -fields, is a primal cluster.

Proof. First we note that $\tilde{\mathcal{F}}$ is obviously a strictly coframal class of algebras, in fact the three primitive operations $\times, \circ, \circ^{\circ}$ themselves form a strict frame (called the *natural frame*) in each $\mathcal{F}_n \in \tilde{\mathcal{F}}$. From the remarks preceding theorem 4.1 and by theorem 3.3 together with the definition of the concept primal cluster, we shall be through if we can show that $\mathcal{F}_m$ and $\mathcal{F}_n$ are strictly independent for $m \neq n$. We may assume $m < n$. Let E_n denote the expression

$$(4.3) \quad E_n = \text{def} = \xi \times \xi^{\circ} \times \xi^{\circ^2} \times \xi^{\circ^3} \times \dots \times \xi^{\circ^{n-1}}$$

where $\xi^{\circ^2} = (\xi^{\circ})^{\circ}$, etc. If now we denote the elements of F_m, F_n by

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{aligned} F_m: & 0', 1', \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^{m-2}, \\ F_n: & 0'', 1'', \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots, \sigma^{n-2} \end{aligned} \right.$$

it may be directly verified that the expressions $|'(\xi)$ and $||'(\xi)$ of theorem 3.1 are here given by

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{aligned} |'(\xi) &= (E_n^{\circ^{n-1}} \times E_n^{\circ^m})^{\circ} = \begin{cases} \equiv 1' \pmod{\mathcal{F}_m} \\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{F}_n} \end{cases} \\ |''(\xi) &= E_n^{\circ^m} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{F}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{F}_n} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Here $E_n^{\circ^r} = (E_n)^{\circ^r} \dots$ (r iterations), and $E_n^{\circ^m} = E_n^{\circ^m} \times E_n^{\circ^m} \times \dots$ (n factors). This completes the proof of theorem 4.1.

¹⁰) The terminology " n -field" stems from the fact that for $n = p^k = \text{prime power}$, $\mathcal{F}_{p^k}$ is a characterization of the Galois field G.F. (p^k) . See also the papers on p - and p^k -rings listed in the bibliographies of [1], [2].

Let now $\mathcal{P}_n = (P_n, \times, \circ) = (P_n, \times, \circ, \cup) = \{\dots, \xi, \dots\}$ be the basic Post algebra of order n ($n > 1$). If we denote the n elements of P_n by

$$P_n: 0, \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \dots, \beta_3, \beta_2, \beta, 1$$

the primitive operations $\times, \circ, \cup$ are given by:

$$(4.6) \quad \xi \times \eta = \min(\xi, \eta)$$

where $\min$ (= minimum) refers to the ordering $0 < \beta_{n-2} < \beta_{n-3} < \dots < \beta_2 < \beta < 1$, and

$$(4.7) \quad \begin{cases} \xi^\circ = \text{cyclic permutation: } 0^\circ = 1, 1^\circ = \beta, \beta^\circ = \beta_2, \dots, \beta_{n-2}^\circ = 0, \\ \xi^\cup = \text{inverse of } \xi^\circ. \end{cases}$$

It is well known that $\mathcal{P}_n$ is functionally strictly complete and therefore primal (see [1], [2] and references there given). We now establish

Theorem 4.2. $\tilde{\mathcal{P}} = \{\mathcal{P}_n\}$, ($n = 2, 3, \dots$), the class of all basic Post algebras, form a primal cluster.

Proof. $\tilde{\mathcal{P}}$, like $\tilde{\mathcal{F}}$, is clearly a strictly coframal class of algebras, with the primitive operations $\times, \circ, \cup$ again serving as a strict coframe. Let m, n be integers with

$$1 < m < n$$

and write

$$(4.8) \quad \begin{cases} P_m: 0', \alpha_{m-2}, \alpha_{m-3}, \dots, \alpha_2, \alpha, 1', \\ P_n: 0'', \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \dots, \beta_2, \beta, 1''. \end{cases}$$

Using an argument parallel to that used in the proof of theorem 4.1, it is sufficient to establish the existence of expressions for $|'(\xi)$ and $|\''(\xi)$. For $|\'(\xi)$ we directly verify

$$(4.9) \quad |'(\xi) = (E_n^{\circ m} \times E_m^{\circ n-1})^\circ = \begin{cases} \equiv 1' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases}$$

Here E_n is again the expression

$$(4.10) \quad E_n = \xi \times \xi^\circ \times \xi^{\circ 2} \times \dots \times \xi^{\circ n-1}$$

and

$$E_n^{\circ n-1} = ((E_n)^\circ)^\circ \dots \quad (n-1 \text{ iterations of } \circ).$$

An expression for $|\''(\xi)$ is more involved and will be broken up into two cases:

Case 1, m divides n . Let $r = n - m$. Then $r \geq m$. Let $d = r - m + 1$. We verify that

$$(4.11) \quad E_n^{\circ m} \times E_n^{\circ m+d} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv \beta_r \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases}$$

Hence we have the expression

$$(4.12) \quad |\''(\xi) = (E_n^{\circ m} \times E_n^{\circ m+d})^{\circ m} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases}$$

Case 2, n not a multiple of m . In this case it is seen in $\mathcal{P}_n$ that for some integer t ($t > 0$),

$$(4.13) \quad 0''^{\circ t \cdot m} \geq \beta_r \quad (\text{where } r = n - m),$$

and hence that in $\mathcal{P}_n$,

$$(4.14) \quad 0'' \circ_{t \cdot m} \times \beta_r = \beta_r.$$

Let

$$0'' \circ_{t \cdot m \circ k} = \beta_r \quad (k \geq 0),$$

i.e.,

$$(4.15) \quad 0'' \circ_{(t \cdot m + k)} = \beta_r.$$

Then the expression

$$(4.16) \quad E_n^{\cup m} \times E_n^{\circ(t \cdot m + k)} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv \beta_r \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases}$$

Hence we have the following expression for $|''(\xi)$,

$$(4.17) \quad |''(\xi) = (E_n^{\cup m} \times E_n^{\circ(t \cdot m + k)})^{\circ m} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{P}_n}. \end{cases}$$

This completes the proof of theorem 4.2.

It is observed that n -fields and basic Post algebras are algebras of the same species, namely $[2, 1]$, i.e., a primitive binary operation (denoted in each case by $\times$) and a primitive unary operation (denoted in each case by $\circ$)¹¹. The question suggests itself: Can either of the primal clusters $\tilde{\mathcal{F}}$ or $\tilde{\mathcal{P}}$ be enlarged by adding appropriate members of the other? Despite the entirely different character of the primitive operations when applied to $\mathcal{F}_n$ as opposed to $\mathcal{P}_n$, we shall prove the rather unexpected

Theorem 4.3. $\{\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{P}}\} = \{\mathcal{F}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{F}_3, \mathcal{P}_4, \dots, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}_n, \dots\}$, the combined class of n -fields and basic Post algebras, form a primal cluster¹².

Proof. Let

$$(4.18) \quad \begin{cases} P_m: 0', \alpha_{m-2}, \alpha_{m-3}, \dots, \alpha_2, \alpha, 1' \\ F_n: 0'', \beta^{n-2}, \beta^{n-3}, \dots, \beta^2, \beta, 1'' \end{cases}$$

be the elements of $\mathcal{P}_m = (P_m, \times, \circ, \cup)$ and $\mathcal{F}_n = (F_n, \times, \circ, \cup)$ respectively¹³. We recall that the primitive operation $\times$ denotes "min" in $\mathcal{P}_m$ and "cyclic group with null" in $\mathcal{F}_n$, while the primitive $\circ$ (with $\cup$ as its inverse) denotes a cyclic permutation in either case, namely

$$(4.19) \quad \begin{cases} \xi^\circ \text{ in } P_m: 0'^\circ = 1', \quad 1'^\circ = \alpha, \quad \alpha^\circ = \alpha_2, \dots, \alpha_{m-2}^\circ = 0', \\ \xi^\circ \text{ in } F_n: 0''^\circ = 1'', \quad 1''^\circ = \beta, \quad \beta^\circ = \beta^2, \dots, (\beta^{n-2})^\circ = 0''. \end{cases}$$

Taking due account of theorems 4.2 and 4.3 and arguing *mutatis mutandis* as in the proofs of these theorems, we shall be through if we can establish that: for each pair of integers m, n ($m > 1$, $n > 1$ and m, n not both $= 2$), expressions for the functions $|'(\xi)$ and $|''(\xi)$ exist. We shall exhibit such expressions in several parts.

¹¹) In case $\cup$ as well as $\circ$ is taken as primitive, the species is of course $[2, 1, 1]$.

¹²) It is noted that for the special case $n = 2$, $\mathcal{F}_2$ and $\mathcal{P}_2$ are isomorphic algebras. Since isomorphic algebras (when not isomorphic with $\circ$) are never independent, $\mathcal{F}_2$ and $\mathcal{P}_2$ cannot both appear in the proposed cluster.

¹³) The expressions which we shall obtain are more easily verified if we display the elements of F_n in this order rather than in the order $0, 1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-2}$ previously used.

Case 1, $m < n$. Here we directly verify that

$$(4.20) \quad \begin{cases} |'(\xi) = (E_n^{\circ m} \times E_n^{\circ n-m})^{\circ} = \begin{cases} \equiv 1' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{F}_n}, \end{cases} \\ |''(\xi) = (E_n^{\circ m} \times E_n^{\circ k})^{\circ m} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{F}_n}. \end{cases} \end{cases}$$

Here (as also in cases 2 and 3 below), $E_r = \xi \times \xi^{\circ} \times \dots \times \xi^{\circ r-1}$ and $E_r^{\circ s}$ is the s -fold iteration $((E_n^{\circ})^{\circ}) \dots$, and similarly for $E_r^{\circ s}$ below. The integer k in the expression for $|''(\xi)$ is determined by the conditions:

$$(4.21) \quad \begin{cases} 1 \leq k < n \\ 0''^{\circ m} \times 0''^{\circ k} = 1''^{\circ m}. \end{cases}$$

Since those elements of $\mathcal{F}_n$ different from $0''$ form a group under $\times$ and since $m < n$, such k exists (and is moreover unique). Furthermore since $0''^{\circ m} = \beta^{m-1}$, $0''^{\circ k} = \beta^{k-1}$, $1''^{\circ m} = \beta^{n-m}$, and since $\beta^{n-1} = 1''$, an alternative determination of k is seen to be given by the conditions:

$$(4.22) \quad \begin{cases} 1 \leq k < n, \\ m + k - 2 \equiv n - m \pmod{n-1}. \end{cases}$$

Case 2, $m > n$. Here

$$(4.23) \quad \begin{cases} |''(\xi) = (E_m^{\circ m-1} \times E_m^{\circ n})^{\circ} = \begin{cases} 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ 1'' \pmod{\mathcal{F}_n}, \end{cases} \\ |'(\xi) = \begin{cases} (\text{for } n=2 \text{ and } m \text{ odd}) = E_m^{\circ m+1}, \\ (\text{for } n=2 \text{ and } m \text{ even}) \\ \quad = \{(\xi \times \xi^{\circ})^{\circ} \times (\xi^{\circ} \times \xi^{\circ 2})^{\circ} \times \dots \times (\xi^{\circ m-1} \times \xi^{\circ m})^{\circ}\}^{\circ}, \\ (\text{for } m > n > 2) = (E_m^{\circ})^{\circ m-n+1} \end{cases} \end{cases}$$

Here if D is an expression,

$$(4.24) \quad \begin{cases} D^{\sim} = \text{def } (D^{\circ})^{n-1} = D^{\circ} \times D^{\circ} \times \dots \quad (n-1 \text{ factors}), \\ D^{\sim r} = ((D^{\sim})^{\sim})^{\sim} \dots \quad (r \text{ iterations}). \end{cases}$$

Case 3, $m = n (\neq 2)$. Here

$$(4.25) \quad \begin{cases} |'(\xi) = ((E_m^{\circ 2})^{m-1})^{\circ m-1} = \begin{cases} \equiv 1' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 0'' \pmod{\mathcal{F}_n}, \end{cases} \\ |''(\xi) = ((E_m^{\circ m-1})^{m-1})^{\circ m-1} = \begin{cases} \equiv 0' \pmod{\mathcal{P}_m} \\ \equiv 1'' \pmod{\mathcal{F}_n}. \end{cases} \end{cases}$$

The above three cases are exhaustive, and complete the proof of theorem 4.3.

As already suggested, the foregoing examples of primal clusters serve to illustrate the domain of application of the structure theorems to be derived.

5. Representation, factors.

Let $\{\mathcal{U}_i\}$ be a class of universal algebras of the same (arbitrary) species, Sp , and let $\mathcal{U}_{i_1}, \mathcal{U}_{i_2}, \dots, \mathcal{U}_{i_n}$ be a finite subset of $\{\mathcal{U}_i\}$. An algebra $\mathcal{U}$ is *directly representable* in (or in terms of) $\mathcal{U}_{i_1}, \dots, \mathcal{U}_{i_n}$ if $\mathcal{U}$ is isomorphic with the direct

product of suitable direct powers of $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$. Here the cardinalities of the various direct powers of $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$ are unrestricted, finite or infinite; we shall even permit the "0th direct power", written $\mathfrak{A}^{[0]}$, defined for any algebra $\mathfrak{A}$ to be $\overset{\circ}{1}$,

$$(5.1) \quad \mathfrak{A}^{[0]} = \overset{\circ}{1} = 1\text{-element algebra.}$$

Since $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A} \times \overset{\circ}{1}$ it follows in particular from (5.1) that (a) each of the algebras $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$ individually is directly representable in $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$ and (b) $\overset{\circ}{1}$ is directly representable in $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$.

The more general concept of subdirect representation is defined similarly: with $\{\mathfrak{A}_i\}$, $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$ and $\mathfrak{A}$ as above, $\mathfrak{A}$ is said to be *subdirectly representable* in $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$ if $\mathfrak{A}$ is isomorphic with a suitable subdirect product of suitable subdirect powers of $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$. Here again subdirect powers of arbitrary cardinality are permitted.

We say that $\mathfrak{A}$ is (directly respectively subdirectly) *representable in* $\{\mathfrak{A}_i\}$ if $\mathfrak{A}$ is (dir. resp. subdir.) representable in some finite subset of $\{\mathfrak{A}_i\}$.

If $\mathfrak{A}$ is representable in $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}$ it is of course *a-fortiori* representable in any extended set $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_n}, \mathfrak{A}_{i_{n+1}}, \dots$. In the opposite direction: we shall call $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_k} \in \{\mathfrak{A}_i\}$ a *set of* (dir. resp. subdir.) *factors* for $\mathfrak{A}$ in $\{\mathfrak{A}_i\}$ if $\mathfrak{A}$ is (dir. resp. subdir.) representable in $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_k}$ but is not (dir. resp. subdir.) representable in any proper subset of $\mathfrak{A}_i, \dots, \mathfrak{A}_{i_k}$. Obviously each $\mathfrak{A}$ representable in $\{\mathfrak{A}_i\}$ has at least one set of factors in $\{\mathfrak{A}_i\}$,—and in general more than one set. Trivially for instance: each $\mathfrak{A}_i \in \{\mathfrak{A}_i\}$ is a set (of one member) of direct factors for $\overset{\circ}{1}$.

We shall be interested in the case where $\{\mathfrak{A}_i\}$ is a primal cluster.

6. Structure of primal clusters.

In the foregoing terminology we may now state the basic theorem, relating the representations in primal clusters with classes of identities.

Theorem 6.1.

(A) Let $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_i\}$ be a primal cluster of arbitrary species, *Sp*, let $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ ($0 < n < \infty$) be any n members of $\tilde{\mathfrak{P}}$ and let $\mathfrak{P}$ be any algebra of species *Sp*. A sufficient (and necessary) condition for $\mathfrak{P}$ to be subdirectly representable in $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ is that $\mathfrak{P}$ satisfy all strict identities which are common to the algebras $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$, or, what is the same, that $\mathfrak{P}$ satisfy all strict identities of the algebra $\mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{i_n}$ (direct product).

(B) Subdirect factorization in $\tilde{\mathfrak{P}}$ is unique, that is: if an algebra $\mathfrak{P}$ is subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$ and if $\mathfrak{P} \neq \overset{\circ}{1}$, then $\mathfrak{P}$ has a unique set of subdirect factors in $\tilde{\mathfrak{P}}^{(14)}$.

Proof, part (A). Necessity. This is immediate, in fact if an algebra $\mathfrak{A}$ is a subdirect product of subdirect powers of any algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ (of

¹⁴ A single primal algebra $\mathfrak{P}_1$ always constitutes a cluster (of one member). For such a one member cluster, (B) of theorem 5.1 is trivially true, while (A) specializes to the earlier characterization given in [2], — see theorem 1.1.

the same species), then $\mathfrak{A}$ clearly satisfies all strict identities which are common to $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$.

Sufficiency. Let $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ be as in theorem 5.1. Obviously nothing is lost if we—and to simplify the notation we shall—write simply

$$\mathfrak{P}_{i_1} = \mathfrak{P}_1 = (P_1, o, \dots), \dots, \mathfrak{P}_{i_n} = \mathfrak{P}_n = (P_n, o, \dots).$$

Since $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ are strictly independent they possess a strict coframe (theorem 3.4); let

$$(6.1) \quad (P_1, \times, \circ, \cup; 0_1, 1_1), \quad (P_2, \times, \circ, \cup; 0_2, 1_2), \dots, (P_n, \times, \circ, \cup; 0_n, 1_n)$$

be one such. That is, $(P_k, \times, \circ, \cup; 0_k, 1_k)$ is a strict frame in $\mathfrak{P}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), where the same frame expressions $\times, \circ, \cup$ serve for all $k=1, 2, \dots, n$.

From the strict functional completeness of the $\mathfrak{P}_i$ together with their strict independence it further follows that: for each expression $\Phi(\xi, \dots)$ of species Sp and for each $j=1, 2, \dots, n$ there exists an expression $\Phi^{(j)}(\xi, \dots)$ of species Sp such that

$$(6.2) \quad \Phi^{(j)}(\xi, \dots) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\xi, \dots) \pmod{\mathfrak{P}_j} \\ \equiv 0_k \pmod{\mathfrak{P}_k, k \neq j} \end{array} \right\} \quad (j, k=1, 2, \dots, n).$$

We call $\Phi^{(j)}(\xi, \dots)$ the *projection* on $\mathfrak{P}_j$ (or j^{th} projection) of the expression Φ .

Applied in particular to each primitive operation o itself, and again to the identity operation $e(\xi) \equiv \xi$, we have:

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} o^{(j)}(\xi, \dots) = \left\{ \begin{array}{l} o(\xi, \dots) \pmod{\mathfrak{P}_j} \\ \equiv 0_k \pmod{\mathfrak{P}_k, k \neq j} \end{array} \right\} \\ e^{(j)}(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \pmod{\mathfrak{P}_j} \\ \equiv 0_k \pmod{\mathfrak{P}_k, k \neq j} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (j, k=1, 2, \dots, n).$$

In the foregoing notation we establish the following

Lemma 6.2. *Let $\mathfrak{P}$ be an algebra satisfying all strict identities common to $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ and let $\Phi(\xi, \dots)$ be an arbitrary expression of species Sp . Then*

$$(6.4) \quad \Phi = \Phi^{(1)} \times_{\circ} \Phi^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \Phi^{(n)},$$

$$(6.5) \quad \Phi^{(j)}(\xi, \eta, \dots) = e^{(j)}(\Phi^{(j)}(\xi, \eta, \dots)) \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(e^{(1)}(\xi) \times_{\circ} e^{(2)}(\xi) \times_{\circ} \dots \times_{\circ} e^{(n)}(\xi), e^{(1)}(\eta) \times_{\circ} e^{(2)}(\eta) \times_{\circ} \dots \times_{\circ} e^{(n)}(\eta), \dots) \\ = \Phi^{(1)}(e^{(1)}(\xi), e^{(1)}(\eta), \dots) \times_{\circ} \Phi^{(2)}(e^{(2)}(\xi), e^{(2)}(\eta), \dots) \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \Phi^{(n)}(e^{(n)}(\xi), \dots) \end{array} \right\}$$

are strict identities of $\mathfrak{P}$. Here $\times, \circ, \cup$ is a strict coframe, (6.1), of $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$; $\times_{\circ}$ is the $\circ$ -transform, (3.2), of $\times$ and $\Phi^{(j)}, e^{(j)}$ are the projections (6.2), (6.3¹⁵).

Proof. It is sufficient to prove that (6.4) and (6.5) are strict identities in each $\mathfrak{P}_i$ ($j=1, 2, \dots, n$). Using (6.2) the right side of (6.4) reduces to

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\xi, \dots) \times_{\circ} 0_1 \times_{\circ} 0_1 \times_{\circ} \dots \times_{\circ} 0_1 \pmod{\mathfrak{P}_1} \\ = \Phi(\xi, \dots) \pmod{\mathfrak{P}_1} \end{array} \right.$$

¹⁵ Properly speaking some specific $\times_{\circ}$ -association of the $\Phi^{(i)}$ should be stated in (6.4) since $\times$ and hence $\times_{\circ}$ is not necessarily associative. However the identity (6.4) in $\mathfrak{P}$ does not depend on the $\times_{\circ}$ -association chosen, as is seen from the proof.

since

$$\eta \times_{\circ} 0_1 = (\eta^{\circ} \times 0_1^{\circ})^{\circ} = (\eta^{\circ} \times 1_1)^{\circ} = \eta^{\circ \circ} = \eta.$$

Thus (6.4) is an identity mod $\mathfrak{P}_1$. A similar proof holds mod $\mathfrak{P}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) and hence (6.4) is an identity in $\mathfrak{P}$. Again, mod $\mathfrak{P}_j$ both sides of (6.5) are $= \Phi(\xi, \eta, \dots)$ while mod $\mathfrak{P}_k$ ($k \neq j$) both sides are $= 0_k$. Thus (6.5) is an identity in $\mathfrak{P}$. The proof of (6.6) is given in the same way.

As in the foregoing, let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ be $\in \tilde{\mathfrak{P}}$ = primal cluster, of species $S\mathfrak{p}$, and let $\mathfrak{P} = (P, o, \dots)$ be any algebra of species $S\mathfrak{p}$ which satisfies all strict identities which are common to $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$. For each $j = 1, 2, \dots, n$ we now define an algebra $\mathfrak{P}^{(j)} = (P^{(j)}, o, \dots)$ of species $S\mathfrak{p}$, called the *projection of the algebra $\mathfrak{P}$ on $\mathfrak{P}_j$* . Here the class $P^{(j)}$ of elements comprising $\mathfrak{P}^{(j)}$ is a certain subset of the class P , namely

$$(6.7) \quad \begin{cases} P^{(j)} = \text{range of } e^{(j)}(\xi), & \xi \in P \\ P^{(j)} \subseteq P. \end{cases}$$

Finally the primitive operations $o(\xi, \dots), \dots$ of $\mathfrak{P}^{(j)}$ are defined to be the operations $o^{(j)}(\xi, \dots)$ operating in $\mathfrak{P}$. Thus for $\xi, \eta, \dots \in P^{(j)}$ (and hence also $\in P$) and for a primitive operation o of $\mathfrak{P}^{(j)}$

$$(6.8) \quad \begin{cases} o(\xi, \eta, \dots) = o^{(j)}(\xi, \eta, \dots) \in P \\ \quad \quad \quad = e^{(j)}(o^{(j)}(\xi, \eta, \dots)) \in P^{(j)}. \end{cases}$$

[Here we have made use of (6.5), an identity of $\mathfrak{P}$.] From (6.8), $P^{(k)}$ as defined is closed under all primitive operations of $\mathfrak{P}^{(k)}$, thus verifying that $\mathfrak{P}^{(k)}$ as defined is indeed again an algebra (of species $S\mathfrak{p}$).

Each $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) itself naturally satisfies all strict identities common to $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ and it is therefore meaningful to inquire about $\mathfrak{P}_i^{(j)}$. We have

Lemma 6.3. *If $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ are $\in \tilde{\mathfrak{P}}$ = primal cluster, then*

$$(6.9) \quad \mathfrak{P}_i^{(i)} \cong \mathfrak{P}_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(6.10) \quad \mathfrak{P}_i^{(j)} \cong \mathbf{1} = \text{one-element algebra} \quad (i \neq j).$$

Proof. $P_i^{(i)} = P_i$ since $e^{(i)}(\xi) = \xi \pmod{\mathfrak{P}_i}$ and hence the range of $e^{(i)}(\xi)$ in $\mathfrak{P}_i$ is P_i itself. Again $o(\xi, \dots)$ in $\mathfrak{P}_i^{(i)}$ is $o^{(i)}(\xi, \dots)$ in $\mathfrak{P}_i = o(\xi, \dots)$ in $\mathfrak{P}_i$. This proves (6.9). For $i \neq j$ we have $e^{(j)}(\xi) \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{P}_j}$, hence the class $P_i^{(j)}$ consists of the single element 0_j . (6.10) is then immediate.

Theorem 6.4. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ be $\in \tilde{\mathfrak{P}}$ = primal cluster, and let $\mathfrak{P}$ be any algebra which satisfies all strict identities common to $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$. Then for each $j = 1, 2, \dots, n$, $\mathfrak{P}^{(j)}$ is isomorphic with some subdirect power $\mathfrak{P}_j'$ of $\mathfrak{P}_j$,*

$$(6.11) \quad \mathfrak{P}^{(j)} \cong \mathfrak{P}_j'.$$

Proof. We first show that: (a) $\mathfrak{P}^{(j)}$ satisfies all strict identities common to the algebras $\mathfrak{P}_1^{(j)}, \mathfrak{P}_2^{(j)}, \dots, \mathfrak{P}_n^{(j)}$. Let $I: \Phi = \Psi$ be any strict identity satisfied by all the algebras $\mathfrak{P}_1^{(j)}, \mathfrak{P}_2^{(j)}, \dots, \mathfrak{P}_n^{(j)}$. This implies that $I': \Phi' = \Psi'$ satisfies

all strict identities common to $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$; here Φ', Ψ' result from Φ, Ψ on replacing each primitive operation o , ... in the latter by the expressions $o^{(i)}, \dots$. Hence I' is a strict identity of $\mathfrak{P}$, which in turn (by reversing the replacements which led from I to I') implies that I is an identity of $\mathfrak{P}^{(i)}$. This establishes the assertion (a).

From (a) above, (6.9) and (6.10), and recalling that $\circ$ satisfies all possible identities, we have the result: (a') $\mathfrak{P}^{(i)}$ satisfies all strict identities of $\mathfrak{P}_i$. Since $\mathfrak{P}_i$ is primal, the desired conclusion of theorem 6.4 now follows from (a') on application of the basic theorem 1.1.

Lemma 6.5. *Let $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ and $\mathfrak{P}$ be algebras satisfying the premise of theorem 6.4, and let Sp be their species, Further let $\mathfrak{P}^*$ denote the direct product of the projections of $\mathfrak{P}$ on the $\mathfrak{P}_i$,*

$$(6.12) \quad \mathfrak{P}^* = \text{def} = \mathfrak{P}^{(1)} \times \mathfrak{P}^{(2)} \times \dots \times \mathfrak{P}^{(n)}.$$

Then $\mathfrak{P}$ is a homomorphic image of $\mathfrak{P}^*$,

$$(6.13) \quad \mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P} \quad (\text{homomorphism}).$$

Proof. Now $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ possess a strict coframe,—let

$$(P_1, \times, \circ, \cup; 0_1, 1_1), \quad (P_2, \times, \circ, \cup; 0_2, 1_2), \dots, (P_n, \times, \circ, \cup; 0_n, 1_n)$$

be such. Recalling that the $P^{(i)}$ are all subsets of P , we shall first note that (1°) each $\xi \in \mathfrak{P}$ may be expressed in at least one way in the form

$$(6.14) \quad \xi = \xi^{(1)} \times_{\circ} \xi^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \xi^{(n)}$$

where

$$(6.15) \quad \xi^{(i)} \in P^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

and conversely (2°) each expression $\xi^{(1)} \times_{\circ} \xi^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \xi^{(n)}$ in which the $\xi^{(i)}$ satisfy (6.15) is $\in \mathfrak{P}$. Here (2°) is obvious since $\mathfrak{P}^{(i)} \subseteq \mathfrak{P}$. (1°) follows from (6.4) if we there take Φ as $e(\xi) = \xi$; we then have

$$\xi = e^{(1)}(\xi) \times_{\circ} e^{(2)}(\xi) \times_{\circ} \dots \times_{\circ} e^{(n)}(\xi)$$

and (6.14) is satisfied with $e^{(i)}(\xi) = \xi^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

The elements ξ^* of $\mathfrak{P}^*$ consist of all ordered n -uples

$$\xi^* = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}), \quad (\xi^{(i)} \in \mathfrak{P}^{(i)}).$$

We shall establish that the mapping

$$(6.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^* = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}) \rightarrow \xi = \xi^{(1)} \times_{\circ} \xi^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \xi^{(n)} \\ \mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P} \end{array} \right.$$

is a homomorphism. That (6.16) maps $\mathfrak{P}^*$ on (all of) $\mathfrak{P}$ follows from (1°) and (2°) above. Let $o(\xi, \dots)$ be any primitive operation of species Sp . We must show that if $\xi^* \rightarrow \xi, \eta^* \rightarrow \eta, \dots$ under (6.16), then also $o(\xi^*, \eta^*, \dots) \rightarrow o(\xi, \eta, \dots)$. Recalling the definition of the operation o in $\mathfrak{P}^{(i)}$ this is equivalent to showing that

$$(o^{(1)}(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \dots), o^{(2)}(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \dots), \dots) \rightarrow o(\xi^{(1)} \times_{\circ} \xi^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \eta^{(1)} \times_{\circ} \eta^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \dots) \quad (\text{under 6.16}).$$

This in turn is equivalent to establishing that

$$\begin{cases} o^{(1)}(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \dots) \times_{\circ} o^{(2)}(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \dots) \times_{\circ} \dots \times_{\circ} o^{(n)}(\xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \dots) \\ = o(\xi^{(1)} \times_{\circ} \xi^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \xi^{(n)}, \eta^{(1)} \times_{\circ} \eta^{(2)} \times_{\circ} \dots \times_{\circ} \eta^{(n)}, \dots). \end{cases}$$

But this is an identity of $\mathfrak{P}$ as follows from (6.6) on putting $\Phi = o$, $c^{(j)}(\xi) = \xi^{(j)}$ etc. Hence (6.16) is a homomorphism, and lemma 6.5 is proved.

We may now complete the proof of part A of theorem 6.1. If $\mathfrak{P}$ satisfies the premise of the latter, then from theorem 6.4 and lemma 6.5 jointly we have that

$$(6.17) \quad \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_n \rightarrow \mathfrak{P} \quad (\text{homomorphism}),$$

where $\mathfrak{P}_i$ is some subdirect power of $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Part A of theorem 6.1 then follows from the observation that the only homomorphic images of such an algebra $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_n$ are again of this form, i.e., the direct product of subdirect powers of $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$. This last remark is a ready consequence of the following two facts (proved in [1], [2]): (a) each $\mathfrak{P}_i$ (being functionally strictly complete) is simple, i.e. has no ideals except $\mathfrak{P}_i$ itself and $\circ = 1$ -element algebra, and (b) a subalgebra of a direct power of $\mathfrak{P}_i$ is a subdirect power of $\mathfrak{P}_i$.

We now turn to the

Proof of part (B) of theorem 6.1.

Suppose an algebra $\mathfrak{P} \neq \circ$ exists which is subdirectly representable in the primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$ in two different ways, that is, which has two different sets of subdirect factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$, say $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}$ and $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}$, with

$$(6.18) \quad \{\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}\} \neq \{\mathfrak{P}_{j_1}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}\}.$$

If we denote by $Id\{\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots\}$ the class of all strict identities common to the algebras $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots$ it follows that

$$(6.19) \quad Id\{\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}\} = Id\{\mathfrak{P}_{j_1}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}\},$$

since either side of (6.19) is simply the class of all strict identities satisfied by the algebra $\mathfrak{P}$. That (6.18) and (6.19) together are impossible will be shown by the following theorem, which will then complete the proof of part B of theorem 6.1.

Theorem 6.6. *Let $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}$ be a subset of m different members of a primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$, let $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}$ be a subset of n different members of $\tilde{\mathfrak{P}}$, and let*

$$(6.20) \quad Id\{\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}\} = Id\{\mathfrak{P}_{j_1}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}\}.$$

Then the subsets are identical

$$(6.21) \quad \{\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}\} = \{\mathfrak{P}_{j_1}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}\},$$

and in particular $m = n$.

Proof. We shall give an indirect proof. Suppose the asserted conclusion false; then with full generality we may suppose that

$$(6.22) \quad \mathfrak{P}_{i_1} \neq \mathfrak{P}_{i_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Let $0_{i_1}, 0_{i_2}, \dots, 0_{i_m}$ be arbitrarily chosen elements of $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}$ respectively and let $0_{j_1}, \dots, 0_{j_n}$ be elements of $\mathfrak{P}_{j_1}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}$ respectively, where the latter may also be arbitrarily chosen except for the condition

$$(6.23) \quad 0_{i_s} = 0_{i_r} \quad \text{if} \quad \mathfrak{P}_{i_s} = \mathfrak{P}_{i_r} \quad (r = 1, \dots, m; s = 1, 2, \dots, n).$$

From the strict independence of the algebras $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}$ augmented by those algebras $\mathfrak{P}_{j_1}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}$ which are different from all $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_m}$, and from the agreement (6.23) it follows that: corresponding to each primitive operation $o(\xi, \dots)$ there exists an expression $o^{(i_1)}(\xi, \dots)$ satisfying:

$$(6.24) \quad o^{(i_1)}(\xi, \dots) = \begin{cases} \equiv o(\xi, \dots) & (\text{mod } \mathfrak{P}_{i_1}) \\ \equiv 0_{i_r} & (\text{mod } \mathfrak{P}_{i_r}; r = 2, 3, \dots, m) \\ \equiv 0_{j_s} & (\text{mod } \mathfrak{P}_{j_s}; s = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Let now

$$(6.25) \quad \mathfrak{Q} = \text{def} = \mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{i_m} \quad (\text{direct product}).$$

From the hypothesis (6.20) it then follows that $\mathfrak{Q}$ satisfies all strict identities common to $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}$. From this it then further follows (see proof of theorem 6.4) that for the projection $\mathfrak{Q}^{(i_1)}$ of $\mathfrak{Q}$ on $\mathfrak{P}_{i_1}$:

$$(6.26) \quad \begin{cases} \mathfrak{Q}^{(i_1)} \text{ satisfies all strict identities common to} \\ \mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1)}, \mathfrak{P}_{j_2}^{(i_1)}, \dots, \mathfrak{P}_{j_n}^{(i_1)}. \end{cases}$$

But on use of (6.9) and (6.10) we have

$$(6.27) \quad \begin{cases} \mathfrak{Q}^{(i_1)} = \mathfrak{P}_{i_1}^{(i_1)} \times \mathfrak{P}_{i_2}^{(i_1)} \times \dots \times \mathfrak{P}_{i_m}^{(i_1)} \\ \cong \mathfrak{P}_{i_1} \times \overset{\circ}{\mathfrak{I}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{I}} \times \dots \times \overset{\circ}{\mathfrak{I}} \\ \cong \mathfrak{P}_{i_1}. \end{cases}$$

Again by use of (6.9), (6.10) together with (6.22) we have

$$(6.28) \quad \mathfrak{P}_{j_1}^{(i_1)} \cong \mathfrak{P}_{j_2}^{(i_1)} \cong \dots \cong \mathfrak{P}_{j_n}^{(i_1)} \cong \overset{\circ}{\mathfrak{I}}.$$

From (6.26), (6.27), (6.28) we then have:

$$(6.29) \quad \mathfrak{P}_{i_1} \text{ satisfies all strict identities of } \overset{\circ}{\mathfrak{I}}.$$

This however is absurd since $\overset{\circ}{\mathfrak{I}}$ satisfies all possible identities, and $\mathfrak{P}_{i_1} \not\cong \overset{\circ}{\mathfrak{I}}$. With this contradiction theorem 6.6 is proved, and with it the basic theorem 6.1.

In proving theorem 6.1 (part A) we note that an incidental proof of the following theorem was given; this permits the concept of subdirect representation (§ 5) to be stated in a simpler semi-direct form:

Theorem 6.7. *Let $\mathfrak{P}$ be subdirectly representable in the primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$, and let $\mathfrak{P} \neq \circ$. If $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ are the (unique) subdirect factors of $\mathfrak{P}$ in $\tilde{\mathfrak{P}}$, then $\mathfrak{P}$ is isomorphic with the direct product of suitable subdirect powers $\mathfrak{P}_{i_1}^{k_1}, \mathfrak{P}_{i_2}^{k_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}^{k_n}$ of $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ respectively,*

$$(6.30) \quad \mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{i_n}.$$

We have the further equivalent formulation,

Theorem 6.8. *Let $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ be $\in \tilde{\mathfrak{P}} = \text{primal cluster}$, and let $\mathfrak{P}$ be an algebra isomorphic with a subalgebra of the direct product of suitable direct powers of $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ respectively. Then $\mathfrak{P}$ is subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$; if $\mathfrak{P} \neq \circ$ then $\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ are its subdirect factors.*

The proof is a direct consequence of theorem 6.7 together with the following result proved in [2]: A subalgebra of a direct power of a primal algebra $\mathfrak{P}_i$ is a subdirect power of $\mathfrak{P}_i$.

We call attention to the finite case, in which subdirect representations may be stated entirely in direct form. In [1], [2] it was shown that: A finite algebra which is a subdirect power of a primal algebra $\mathfrak{P}_i$ is isomorphic with a direct power of $\mathfrak{P}_i$. This together with theorem 6.7 yields

Theorem 6.9. *Let $\mathfrak{P}$ be a finite algebra which is subdirectly representable in a primal cluster $\tilde{\mathfrak{P}}$, and let $\mathfrak{P} \neq \circ$. Then the subdirect factors $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n}$ of $\mathfrak{P}$ are direct factors, and*

$$(6.31) \quad \mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_{i_1}^{k_1} \times \mathfrak{P}_{i_2}^{k_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{i_n}^{k_n},$$

where $\mathfrak{P}_{i_r}^{k_r}$ is the k_r^{th} direct power of $\mathfrak{P}_{i_r}$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

Formulated in term of identities the representation theory in the finite case,—apart from the uniqueness of the representation—is given by

Theorem 6.10. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ be an independent set of primal algebras of orders $m_1, m_2, \dots, m_n$ respectively. Then any finite algebra $\mathfrak{P}$ which satisfies all strict identities of the algebra $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_n$ (direct product) is isomorphic with the direct product of (finite) direct powers of $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ respectively,*

$$(6.32) \quad \mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_1^{k_1} \times \mathfrak{P}_2^{k_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_n^{k_n} \quad (0 \leq k_i < \infty; i = 1, 2, \dots, n),$$

and the order m of $\mathfrak{P}$ is given by

$$(6.33) \quad m = m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}.$$

A variety of applications of the representation theory are at hand in terms of the primal clusters exhibited in § 4.

It should perhaps be explicitly pointed out that the concept of independence of algebras, which here plays such an important role, is a generalization—to universal algebras—of the concept of relative primeness of elementary number theory, or, if one prefers, of the associated residue rings. Thus in the formula (6.33), for instance, the integers $m_1, m_2, \dots, m_n$ are in general no longer prime, nor even relatively prime, as they are when applied to the “natural primal cluster” $F_2, F_3, F_5, \dots$,—a subcluster of $\tilde{\mathcal{F}}$ (§ 4).

7. Maximal classes of identities.

Let Sp be an arbitrary but fixed species; all algebras of this section are assumed to be of species Sp . If $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots$ are algebras we recall the notation:

$$Id \{\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots\} = Id \{\mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \dots\}$$

for the class of all strict identities common to $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots$. In particular for $\overset{\circ}{1}$ = one-element algebra, $Id \{\overset{\circ}{1}\}$ = class of all possible identities (of species Sp). In the following $\subset$ denotes *proper* class inclusion.

An algebra $\mathfrak{Q}$ is called equationally *maximal* (or *saturated*) if

$$Id \{\mathfrak{Q}\} \subset Id \{\overset{\circ}{1}\}$$

and if for all algebras $\mathfrak{X}$

$$Id \{\mathfrak{Q}\} \subseteq Id \{\mathfrak{X}\} \subseteq Id \{\overset{\circ}{1}\} \text{ implies: } Id \{\mathfrak{X}\} = Id \{\mathfrak{Q}\} \text{ or } Id \{\mathfrak{X}\} = Id \{\overset{\circ}{1}\}.$$

The following theorem was proved in [2]:

Theorem 7.1. *If $\mathfrak{P}$ is a primal algebra, $\mathfrak{P}$ is equationally maximal.*

Consider now the related notion of relative maximality. If $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ are algebras we say $\mathfrak{Q}_1$ is *equationally maximal in* (or *relative to*) $\mathfrak{Q}_2$ if

$$Id \{\mathfrak{Q}_1\} \subset Id \{\mathfrak{Q}_2\}$$

and for all algebras $\mathfrak{X}$

$$Id \{\mathfrak{Q}_1\} \subseteq Id \{\mathfrak{X}\} \subseteq Id \{\mathfrak{Q}_2\} \text{ implies: } Id \{\mathfrak{X}\} = Id \{\mathfrak{Q}_1\} \text{ or } Id \{\mathfrak{X}\} = Id \{\mathfrak{Q}_2\}.$$

We have the following extension of theorem 7.1,

Theorem 7.2. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n$ be an independent set of primal algebras. Then in the sequence of algebras (where $\times$ denotes direct product),*

$\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_{n-1}, \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_{n-2}, \dots, \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1, \overset{\circ}{1}$
each algebra of the sequence is equationally maximal in its immediate successor.

(Naturally from a given set $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ of independent algebras we get many such maximal chains by rearranging the $\mathfrak{P}_i$.)

The proof of theorem 7.2 follows readily from the fundamental theorem 6.1, and will be omitted. (Compare with the proof of theorem 7.1 in [2].)

8. Problems.

Among numerous questions raised by the foregoing theory we shall merely mention one,—a rather central one: How large can a “maximal” (non-augmentable) primal cluster of given species be? Is such a maximal cluster always infinite? How many distinct maximal clusters are there? Such questions still remain unsettled, or only partially settled.

University of California, Berkeley, Cal. (USA.).

(Eingegangen am 13. November 1954.)

Über meromorphe Modifikationen.

III. Streueigenschaften analytischer und meromorpher Modifikationen¹.

Von

WILHELM STOLL.

Nachdem in den Teilen I und II die notwendigen Hilfsmittel geschaffen wurden, können in diesem Teil diejenigen Sätze über analytische und meromorphe Modifikationen im Falle $n=2$ gewonnen werden, die es in Teil IV und V ermöglichen werden, solche Modifikationen durch σ -Prozesse zu erzeugen.

Ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2 \left(\begin{matrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{matrix} \right)$ analytisch und die Abbildung τ im Punkt $P_0 \in M$ singulär, so ist — wie sich zeigen wird — die Streumenge $\Sigma(P_0)$ entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H , und zwar ist $\Sigma(P_0)$ gerade die Teilmenge von H , auf der $v(Q, H) = P_0$ ist²). Übt man in P_0 hintereinander σ -Prozeß in geeigneter Weise aus (d.h. setzt man einen HOPFSchen σ -Baum ein), so wird die aus $v(Q, H)$ entstehende Abbildung in ganz H pseudokonform. Verfährt man so in jeder singulären Stelle von τ , so erzeugen die ausgeübten σ -Prozesse schließlich die gegebene Modifikation³). Diese Methode von H. HOPF⁴) beruht jedoch wesentlich auf dem regulären Verhalten von v in N ; sie versagt, wenn $\mathfrak{M}$ meromorph ist, zumal dann v auf $\Sigma(P_0)$ nicht mehr analytisch zu sein braucht und über den analytischen Charakter der Streumenge $\Sigma(P_0)$ nichts bekannt ist.

Diese Schwierigkeiten werden nun durch den Hauptsatz über meromorphe Modifikationen⁵), dessen etwas verwickelter Beweis in diesem Teil geführt wird,

¹) Unter dem gemeinsamen Titel „Über meromorphe Modifikationen“ erscheinen eine Reihe von Arbeiten, und zwar Teil I (§ 1 bis § 3), Teil II (§ 4 bis § 6) und Teil III (§ 7 bis § 9) in der Mathematischen Zeitschrift, Teil IV (§ 10 bis § 12) und Teil V (§ 13 bis § 16) in den Mathematischen Annalen. Zur Einleitung, Begriffsbildung und Literatur sei auf Teil I, Math. Z. **61**, S. 206—234, und Teil II, Math. Z. **61**, 467—488 hingewiesen.

²) Man vgl. Satz 7.1 und Satz 7.2.

³) Man vgl. H. HOPF [9] und [9a] und in dieser Arbeit die Sätze 10.16, 11.1, 14.1, 14.2 und 14.3.

⁴) H. HOPF [9a] untersucht analytische Modifikationen in einem Punkt ($n=2$) und allgemeiner „bis auf a schlichte“ Abbildungen. Seine Methode läßt sich aber leicht auf beliebige analytische Modifikationen ($n=2$) und allgemeiner auf analytische Abbildungen, die bis auf eine 2-dimensionale analytische Menge eindeutig sind, übertragen. Wir beschränken uns hier auf Modifikationen. Die Methode von H. HOPF habe ich in Vorträgen in Zürich und Oberwolfach kennengelernt. Ein Manuskript der Arbeit [9a] habe ich erst nach der Fertigstellung dieser Reihe von Arbeiten erhalten; sie ist inzwischen erschienen: Comm. Math. Helv. **29**, 123—156 (1954).

⁵) Man vgl. Satz 9.3 und Satz 9.4.

überwunden. Nach diesem Hauptsatz kann man bei einer beiderseits offenen und meromorphen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2 \left(\begin{smallmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{smallmatrix} \right)$ jeder singulären Stelle $P_0 \in N$ der Abbildung τ eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0) \subseteq \Sigma(P_0) \subseteq N$ *eindeutig* so zuordnen, daß v auf $C(P_0)$ abgesehen von isolierten Punkten regulär ist.

Die Bedeutung dieser Zuordnung wird beispielsweise an dem Spezialfall, daß N nur endlich viele irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 enthält, ersichtlich; dann wird nämlich wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung die Abbildung τ nur in *endlich vielen* Punkten singulär, in denen dann σ -Prozesse anzusetzen sind. Außerdem ist v auf $C(P_0)$ bis auf isolierte Stellen regulär, das gibt den Anschluß an das Konstruktionsverfahren bei analytischen Modifikationen⁶⁾.

Da in diesem und den folgenden Teilen nur noch 4-dimensionale Modifikationen auftreten, werde der Index 2 weggelassen:

$$\mathfrak{M} \left(\begin{smallmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{smallmatrix} \right) = \mathfrak{M} \left(\begin{smallmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{smallmatrix} \right).$$

§ 7. Streumengen bei analytischen Modifikationen.

Die komplexe Mannigfaltigkeit H werde durch κ analytisch in die komplexe Mannigfaltigkeit G abgebildet. Jedem Paar von Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$ und $\beta \in \mathfrak{P}(G)$ wird die offene Menge $V_{\alpha\beta} = \kappa^{-1}(U_\beta) \cap U_\alpha$ zugeordnet. Die offenen Mengen $V_{\alpha\beta}$ überdecken H . Auf $\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta})$ ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial \beta^{-1} \kappa \alpha(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}}$ analytisch. Auf $V_{\alpha\beta} \cap V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ gilt

$$\frac{\partial \tilde{\beta}^{-1} \kappa \tilde{\alpha}(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{\beta}^{-1} \beta(w)}{\partial w} \frac{\partial \beta^{-1} \kappa \alpha(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \alpha^{-1} \tilde{\alpha}(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}}$$

mit

$$\frac{\partial \tilde{\beta}^{-1} \beta(w)}{\partial w} \neq 0, \quad \frac{\partial \alpha^{-1} \tilde{\alpha}(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \neq 0,$$

wobei

$$\tilde{\alpha}(\tilde{z}) = \alpha(\tilde{z}) = P \in V_{\alpha\beta} \cap V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}, \quad w = \beta^{-1} \kappa(P)$$

ist. Die Funktionaldeterminanten $\left. \frac{\partial \beta^{-1} \kappa \alpha(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\alpha^{-1}(P)}$ definieren zusammen mit den offenen Mengen $V_{\alpha\beta}$ eine COUSIN-Verteilung auf H . Ist diese in keinem Teilgebiet von H identisch Null, so sei $\varphi_\kappa(P) \geq 0$ die Vielfachheit⁷⁾ ihrer Nullstelle P . Es ist $\{P | \varphi_\kappa(P) > 0\}$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H , die gerade alle Punkte enthält, die keine Umgebung haben, in der die Abbildung κ pseudokonform ist. Es heiße $\varphi_\kappa(P)$ die Vielfachheit der Abbildung κ im Punkt P . Ist die Funktionaldeterminante $\left. \frac{\partial \beta^{-1} \kappa \alpha(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\alpha^{-1}(P)}$ in einer Umgebung des Punktes P identisch Null, so sei $\varphi_\kappa(P) = \infty$. Die

⁶⁾ Man vgl. die Sätze 12.1, 15.1 und 16.3.

⁷⁾ Zur Vielfachheit der Nullstelle vgl. man STOLL [16] S. 144.

Menge der Punkte, in denen κ nicht pseudokonform ist, kann noch anders gekennzeichnet werden:

Satz 7.1. Satz von HOPF⁸⁾.

Voraussetzung. Die 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H werde durch κ analytisch in die 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G mit der Vielfachheit $\varphi_{\kappa}(Q)$ abgebildet. Die offene Menge $B \subseteq H$ werde durch κ pseudokonform in G abgebildet. Die Menge $N = H - B$ enthalte keinen inneren Punkt.

Behauptung. 1. Die Menge $N_0 = \{Q \mid \varphi_{\kappa}(Q) > 0\}$ ist leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H , die in N enthalten ist.

2. Die offene Menge $B_0 = H - N_0$ wird durch κ pseudokonform in G abgebildet, wobei $\kappa(N_0) \cap \kappa(B_0) = \emptyset$ ist.

3. In B_0 liegt jede offene Teilmenge von H , in der κ eineindeutig ist.

4. Ist $\beta \in \mathfrak{P}(G)$ und wird $(z_1(Q), z_2(Q)) = \beta^{-1}\kappa(Q)$ für $Q \in V_{\beta} = \kappa^{-1}(U_{\beta})$ gesetzt, so gehört ein Punkt $Q_0 \in V_{\beta}$ dann und nur dann zu B_0 , wenn die in V_{β} meromorphe Funktion $\frac{z_1(Q) - z_1(Q_0)}{z_2(Q) - z_2(Q_0)}$ in Q_0 eine Unbestimmtheitsstelle hat.

5. Ist $P_0 \in \kappa(N_0)$, so ist $\kappa^{-1}(P_0)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H , die in N_0 liegt.

6. Auf jedem irreduziblen Teil von N_0 ist κ konstant.

Beweis. 1. Auf B ist $\varphi_{\kappa}(Q) = 0$, woraus $N_0 \subseteq N$ folgt. Da $\varphi_{\kappa}(Q)$ die Vielfachheit der Nullstelle Q einer COUSIN-Verteilung II. Art auf H ist, ist N_0 entweder leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H , w. z. b. w.

2. Für $Q_0 \neq Q_1$ sei $\kappa(Q_0) = \kappa(Q_1)$. Angenommen es ist $Q_0 \in B_0$. Eine offene Umgebung $V_0 \subseteq B_0$ von Q_0 wird durch κ pseudokonform auf eine offene Umgebung $V'_0 \subseteq G$ von $P_0 = \kappa(Q_0)$ abgebildet, wobei $Q_1 \notin V_0$ sei. Eine offene Umgebung V_1 von Q_1 mit $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ wird durch κ analytisch in V'_0 abgebildet. Da die Menge $V_0 \cap N$, also auch $\kappa(V_0 \cap N)$, keinen inneren Punkt hat, ist die offene, nichtleere Menge $\kappa(V_1 \cap B) \subseteq V'_0$ nicht in $\kappa(V_0 \cap N)$ enthalten. Daher ist $\kappa(V_1 \cap B) \cap \kappa(V_0 \cap B) \neq \emptyset$, also auch $V_1 \cap B \cap V_2 \cap B \neq \emptyset$, während $V_1 \cap V_2$ leer ist. Die Annahme war falsch. Es ist $Q_0 \in N_0$ und ebenso $Q_1 \in N_0$; auf B_0 ist κ eineindeutig also pseudokonform. Außerdem ist $\kappa(M_0) \cap \kappa(B_0) = \emptyset$, w. z. b. w.

3. Ist κ auf einer offenen Menge V eineindeutig, so ist dort $\varphi_{\kappa}(Q) = 0$, also $V \subseteq B_0$, w. z. b. w.

4. Ist $\beta \in \mathfrak{P}(G)$ und wird $\beta^{-1}\kappa(Q) = (z_1(Q), z_2(Q))$ für Q aus $V_{\beta} = \kappa^{-1}(U_{\beta})$ gesetzt, so sind $z_1(Q)$ und $z_2(Q)$ auf V_{β} nichtkonstant und analytisch. Auf V_{β} ist

$$f(Q) = \frac{z_1(Q) - z_1(Q_0)}{z_2(Q) - z_2(Q_0)}$$

meromorph. Es sei $a = (a_1, a_2) = (z_1(Q_0), z_2(Q_0))$.

a) Ist $Q_0 \in B_0$, so besteht die Menge $\{Q \mid z_1(Q) = a_1, z_2(Q) = a_2\}$ genau aus dem einen Punkt Q_0 . Also haben die Funktionen $z_1(Q) - a_1$ und $z_2(Q) - a_2$

⁸⁾ Man vgl. H. HOPF [9a] § 1, Nr. 1 und § 3, Nr. 1.

den größten gemeinsamen Teiler 1 und verschwinden in Q_0 . Ihr Quotient $f(Q)$ hat in Q_0 eine Unbestimmtheitsstelle.

b) Die Funktion $f(Q)$ habe in Q_0 eine Unbestimmtheitsstelle. Es gibt eine Karte U_α aus H , für die gilt:

α) Der Polyzylinder $U'_\alpha = \{u | |u_1| < 1, |u_2| < 1\}$ wird durch $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$ pseudokonform auf $U_\alpha \subseteq V_\beta$ abgebildet, wobei $Q_0 = \alpha(0, 0)$ ist.

β) Es gibt eine analytische Funktion $\Delta(Q)$ auf U_α , so daß

$$g_1(Q) = \frac{z_1(Q) - a_1}{\Delta(Q)}, \quad g_2(Q) = \frac{z_2(Q) - a_2}{\Delta(Q)}$$

in jedem Punkt von U_α analytisch und teilerfremd sind.

γ) Außer Q_0 liegt in U_α keine Unbestimmtheitsstelle der Funktion f ; es gilt also $g_1(Q) = g_2(Q) = 0$ für den Punkt $Q = Q_0$ und nur diesen.

δ) Die analytische Menge $N_0 \cap U_\alpha$ aus U_α besteht aus höchstens endlich vielen irreduziblen Teilen.

Da auf jedem irreduziblen Teil von $N_0 \cap U_\alpha$ für höchstens ein Verhältnis $b_1:b_2$ die Funktion $b_1g_1 + b_2g_2 \equiv 0$ ist, kann man zwei verschiedene Verhältnisse $b_{11}:b_{21}$ und $b_{12}:b_{22}$, für die also $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist, und eine offene Umgebung $V \subset U_\alpha$ von Q_0 finden, so daß gilt:

ϵ) Die analytische Menge $L_\varrho = V \cap \{Q | b_{1\varrho}g_1(Q) + b_{2\varrho}g_2(Q) = 0\}$ besteht aus r_ϱ zusammenhängenden komplexen Kurven L_ϱ^ν , für die gilt

$$N_0 \cap L_\varrho^\nu = N_0 \cap \bar{L}_\varrho^\nu \subseteq \{Q_0\},$$

$$L_\varrho^\mu \cap L_\varrho^\nu = \{Q_0\} \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,$$

$$V \cap L_\varrho^\nu = V \cap \bar{L}_\varrho^\nu,$$

$$L_1^\mu \cap L_2^\nu = \{Q_0\}.$$

Durch $\beta^{-1}\kappa(Q)$ wird L_ϱ^ν eindeutig und analytisch, also konform auf $\tilde{L}_\varrho = \{z | b_{1\varrho}(z_1 - a_1) + b_{2\varrho}(z_2 - a_2) = 0\}$ abgebildet, wobei $\beta^{-1}\kappa(Q_0) = a$ ist. Daher ist $r_\varrho = 1$ und $L_\varrho^\nu = L_\varrho$. Im Einheitskreis gibt es analytische Funktionen $u_{\nu\varrho}(t)$ mit $u_{\nu\varrho}(0) = 0$, so daß der Einheitskreis durch $\alpha(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t))$ konform in L_ϱ abgebildet wird. Durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varrho(t) &= (h_{1\varrho}(t), h_{2\varrho}(t)) \\ &= (z_1(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t)), z_2(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t))) \\ &= \beta^{-1}\kappa(\alpha(u_{1\varrho}(t), u_{2\varrho}(t))) \end{aligned}$$

mit

$$\mathfrak{h}_\varrho(0) = (h_{1\varrho}(0), h_{2\varrho}(0)) = (a_1, a_2) = a$$

wird der Einheitskreis konform in die Ebene $\tilde{L}_\varrho$ abgebildet. Es folgt $\mathfrak{h}'_\varrho(0) \neq 0$. Wegen $b_{1\varrho}(h_{1\varrho}(t) - a_1) + b_{2\varrho}(h_{2\varrho}(t) - a_2) \equiv 0$ gilt

$$b_{1\varrho}h'_{1\varrho}(0) + b_{2\varrho}h'_{2\varrho}(0) = 0 \quad (\varrho = 1, 2).$$

Für zwei Zahlen $c_1 \neq 0$ und $c_2 \neq 0$ gilt also

$$h'_{1e}(0) = -c_e b_{2e} \quad \text{und} \quad h'_{2e}(0) = c_e b_{1e}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} 0 \neq \begin{vmatrix} -b_{21} & b_{11} \\ -b_{22} & b_{12} \end{vmatrix} &= c_1^{-1} c_2^{-1} \begin{vmatrix} h'_{11}(0) & h'_{21}(0) \\ h'_{12}(0) & h'_{22}(0) \end{vmatrix} \\ &= c_1^{-1} c_2^{-1} \begin{vmatrix} z_{1u_1}(0, 0) & z_{1u_2}(0, 0) \\ z_{2u_1}(0, 0) & z_{2u_2}(0, 0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u'_{11}(0) & u'_{12}(0) \\ u'_{21}(0) & u'_{22}(0) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bei $\alpha^{-1}(Q_0)$ ist $\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$, woraus $\varphi_*(Q_0) = 0$, also $Q_0 \in B_0$ folgt, w. z. b. w.

5. Ist $P_0 \in \kappa(N_0)$, so gilt $\kappa^{-1}(P_0) \subseteq N_0$ gemäß der 2. Behauptung. Es gibt eine Karte U_β von G mit $\beta \in \mathfrak{P}(G)$, die P_0 enthält. Es ist $V_\beta = \kappa^{-1}(U_\beta)$ eine offene Umgebung von $\kappa^{-1}(P_0)$ und die durch $\beta^{-1}\kappa(Q) = (z_1(Q), z_2(Q))$ definierten Funktionen sind auf V_β analytisch. Mit $a = (a_1, a_2) = \beta^{-1}(P_0)$ gilt $\kappa^{-1}(P_0) = \{Q \mid z_1(Q) = a_1, z_2(Q) = a_2\} \neq \emptyset$. Also ist $\kappa^{-1}(P_0)$ eine analytische Menge in V_β . Auf ihr hat die Funktion $\frac{z_1(Q) - a_1}{z_2(Q) - a_2}$ keine Unbestimmtheitsstelle; daher ist $\kappa^{-1}(P_0)$ die Nullstellenmenge des größten gemeinsamen Teilers von $z_1(Q) - a_1$ und $z_2(Q) - a_2$, also eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V_β und, weil $\kappa^{-1}(P_0)$ in H abgeschlossen ist, sogar aus H , w. z. b. w.

6. Es sei N_1 ein irreduzibler Teil von N_0 . Ein gewöhnlicher Punkt $Q_0 \in N_1$ von N_0 werde gewählt. Es sei $P_0 = \kappa(Q_0)$. Dann ist $\kappa^{-1}(P_0)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H , die durch Q_0 geht und in N_0 liegt. Jeder irreduzible Teil von $\kappa^{-1}(P_0)$ ist auch einer von N_0 ; ein irreduzibler Teil von $\kappa^{-1}(P_0)$ geht durch Q_0 und Q_0 liegt nur in dem irreduziblen Teil N_1 von N_0 , also ist N_1 irreduzibler Teil von $\kappa^{-1}(P_0)$, d. h. $\kappa(Q_0) = P_0$ für $Q \in N_1$, w. z. b. w.

Hieraus ergibt sich:

Satz 7.2. Streumengen bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. Die Modifikation $\mathfrak{M} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei analytisch. Die größte offene Menge aus G , in der τ regulär ist, sei A_0 und E die größte offene Menge aus G , in der τ pseudokonform ist. Es sei M_0 die Menge der Punkte in M , in denen τ die Mannigfaltigkeit G ändert und M_1 die Menge der Punkte aus M , in denen τ streut.

Behauptung. 1. Es ist $A_0 = E$ und $M_1 \subseteq M_0 = G - A_0$.

2. Ist $P_0 \in M_1$, so ist $\Sigma(P_0) \subseteq N$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H . Es ist $\Sigma(P_0) = v^{-1}(P_0, H)$.

3. Hat H eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so besteht M_1 aus höchstens abzählbar vielen Punkten; ist H kompakt, so besteht M_1 aus höchstens endlich vielen Punkten.

Beweis. 1. Es ist $M_0 = G - E$. Nach Satz 5.7 ist $\tau(A_0 - E, G) \cap H = \tau(A_0 - E, G)$ leer. Daher ist $A_0 = E$.

2. Es sei $P_0 \in M_1$. Ist $Q_0 \in \Sigma(P_0)$, so gibt es eine Folge $Q^v \in B$ mit $Q^v \rightarrow Q_0$ und $v(Q^v) \rightarrow P_0$ für $v \rightarrow \infty$. Also ist $P_0 = v(Q_0, H)$, d.h. $Q_0 \in v^{-1}(P_0, H)$, womit $\Sigma(P_0) \subseteq v^{-1}(P_0, H)$ bewiesen ist. Wenn umgekehrt $Q_0 \in v^{-1}(P_0, H)$ ist, so gilt $P_0 = v(Q_0, H)$ und es gibt eine Folge $Q^v \in B$ mit $\lim_{v \rightarrow \infty} Q^v = Q_0$. Dann strebt $v(Q^v) \rightarrow P_0$ für $v \rightarrow \infty$. Es ist $v(Q^v) \in A$. Also folgt $Q_0 \in \Sigma(P_0)$, woraus sich $\Sigma(P_0) = v^{-1}(P_0, H)$ ergibt. Nach Satz 7.1 ist $\Sigma(P_0) = v^{-1}(P_0, H)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus H .

3. Da $M_1 = \{P \mid \Sigma(P) \neq \emptyset\} \cap M_0$ ist und $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1)$ für $P_0 \neq P_1$ leer ist, ergibt sich die 3. Behauptung unmittelbar aus der zweiten, w. z. b. w.

In den Punkten von M_1 werden später die σ -Prozesse anzusetzen sein. Über die Streumengen dieser Punkte weiß man nun gut Bescheid. Die Aufgabe der nächsten Paragraphen wird es sein, entsprechende Aussagen für meromorphe Modifikationen zu gewinnen, was wesentlich schwieriger sein wird.

§ 8. Hilfssätze.

Bevor die Streusätze über meromorphe Modifikationen bewiesen werden können, sind noch einige Vorbereitungen notwendig.

Hilfssatz 8.1. Voraussetzung. Die Funktionen f und g seien für $|z_1| \leq a$ und $|z_2| \leq b$ analytisch und haben dort jede wenigstens eine Nullstelle. Es sei $f(z_1, z_2) \neq 0$ für $|z_1| \leq a$ und $|z_2| = b$ und $g(z_1, z_2) \neq 0$ für $|z_1| = a$ und $|z_2| \leq b$.

Behauptung. Die Funktionen f und g haben in $|z_1| < a$ und $|z_2| < b$ eine gemeinsame Nullstelle.

Beweis. Es gibt Zahlen $a_1 > a$ und $b_1 > b$, so daß f und g im Polyzylinder $U_1 = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < a_1, |z_2| < b_1\}$ analytisch sind. Es ist

$$F = \{\mathfrak{z} \mid f(z_1, z_2) = 0, |z_1| < a_1, |z_2| < b_1\} \neq \emptyset$$

eine 2-dimensionale analytische Menge aus U_1 . Es sei $\mathfrak{F}$ die Riemannsche Fläche zur analytischen Menge F und $\gamma(R) = (z_1(R), z_2(R))$ die zugehörige Projektion von $\mathfrak{F}$ auf F . Es sei $U = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < a, |z_2| < b\}$. Es ist $\gamma^{-1}(F \cap U) = \mathfrak{F}^*$ offen. Die abgeschlossene Hülle $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$ ist kompakt. Der Rand von $\mathfrak{F}^*$ ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}^* - \mathfrak{F}$. Es ist

$$\mathfrak{C} = \gamma^{-1}(\{\mathfrak{z} \mid |z_1| = a, |z_2| \leq b\} \cap F).$$

Die Funktion $g^*(R, u) = g(z_1(R), u, z_2(R))$ ist auf $\mathfrak{F} \times \{u \mid |u| \leq 1\}$ analytisch und auf $\mathfrak{C} \times \{u \mid |u| \leq 1\}$ nicht Null. Daher haben für jedes feste u in $|u| \leq 1$ die Funktionen $g^*(R, u)$ in $\mathfrak{F}^*$ gleichviel Nullstellen, wenn jede mit ihrer Vielfachheit gezählt wird. Die analytische Menge F trifft jeden Kreis $\{\mathfrak{z} \mid z_1 = 0, |z_2| \leq b\}$ mit $|c| \leq a$ und die Funktion $g(z_1, c)$ hat in $|z_1| \leq a$ für jedes $|c| \leq b$ wenigstens eine Nullstelle. Also hat $g(z_1, 0)$ eine Nullstelle c_0 mit $|c_0| < b$. Ein Punkt (c_0, d_0) liegt auf F . In der Teilmenge $\gamma^{-1}(c_0, d_0) \subset \mathfrak{F}^*$ verschwindet $g^*(R, 0)$, also hat $g^*(R, u)$ für jedes $|u| \leq 1$, insbesondere für $u = 1$, eine Nullstelle R_0 auf $\mathfrak{F}^*$. Es sei $\gamma(R_0) = \mathfrak{z}_0$. Dann ist $\mathfrak{z}_0 \in F \cap U$, d.h. $f(\mathfrak{z}_0) = 0$ und $0 = g^*(R_0, 1) = g(\mathfrak{z}_0)$, womit eine gemeinsame Nullstelle in U gefunden ist, w. z. b. w.

Aus Hilfssatz 8.1 folgt unmittelbar:

Hilfssatz 8.2. Voraussetzung. In einem $D = \{\zeta \mid |z_1| \leq a, |z_2| \leq b\}$ umfassenden Gebiet seien analytische Mengen F_1 und F_2 der reinen Dimension 2 mit $D \cap F_1 \neq \emptyset$ und $D \cap F_2 \neq \emptyset$ gegeben. Es seien

$$F_1 \cap \{\zeta \mid |z_1| \leq a, |z_2| = b\} = \emptyset,$$

$$F_2 \cap \{\zeta \mid |z_1| = a, |z_2| \leq b\} = \emptyset.$$

Behauptung. Es ist $F_1 \cap F_2 \cap D \neq \emptyset$.

Hilfssatz 8.3. Voraussetzung. 1. Im Polyzylinder $D = \{\zeta \mid |z_1| < a, |z_2| < b\}$ sei eine rein 2-dimensionale analytische Menge F gegeben, die die Ebene $\{\zeta \mid z_2 = 0\}$ im Nullpunkt und nur dort schneidet.

2. In D seien abzählbar viele rein 2-dimensionale analytische Mengen L_ν gegeben. Der Durchschnitt $L_\nu \cap L_\mu$ bestehe für $\mu \neq \nu$ nur aus isolierten Punkten.

In $D_1 = \{\zeta \mid |z_1| < a, 0 < |z_2| < b\}$ sei $D_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$ analytisch.

3. Es gebe eine Nullfolge $\zeta_\nu \in L_\nu$.

Behauptung. Es gibt eine Nummer ν_0 , so daß $L_\nu \cap F \neq \emptyset$ für $\nu \geq \nu_0$ ist.

Beweis. Für zwei Zahlen a_1, b_1 mit $0 < a_1 < a$ und $0 < b_1 < b$ ist $F \cap \{\zeta \mid |z_1| = a_1, |z_2| \leq b_1\} = \emptyset$. Da $\{\zeta \mid |z_1| \leq a_1, |z_2| = b_1\}$ kompakt ist und in D_1 liegt, und da $D_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$ in D_1 analytisch ist, gibt es eine Nummer ν_0 , so daß der Durchschnitt $L_\nu \cap \{\zeta \mid |z_1| \leq a_1, |z_2| = b_1\} = \emptyset$ für alle $\nu \geq \nu_0$ ist. Zugleich kann ν_0 so groß gewählt werden, daß $\zeta_\nu \in D^* = \{\zeta \mid |z_1| < a_1, |z_2| < b_1\}$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Es ist $\zeta_\nu \in L_\nu \cap D^*$ für $\nu \geq \nu_0$ und $F \cap D^* \neq \emptyset$. Nach Hilfssatz 8.2 ist $F \cap L_\nu \cap D^*$ nicht leer für $\nu \geq \nu_0$, w. z. b. w.

Ohne weiteres überträgt sich dieser Hilfssatz auf Mannigfaltigkeiten:

Hilfssatz 8.4. Voraussetzung. 1. In der 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit D seien zwei rein 2-dimensionale analytische Mengen F und N mit $F \cap N = \{P_0\}$ gegeben, wobei P_0 ein gewöhnlicher Punkt von N sei.

2. In D seien abzählbar viele analytische Mengen L_ν der reinen Dimension 2 gegeben. Der Durchschnitt $L_\nu \cap L_\mu$ bestehe für $\mu \neq \nu$ nur aus isolierten Punkten.

In $D_1 = D - N$ sei $D_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L_\nu$ analytisch.

3. Es gebe eine Folge $P^\nu \in L_\nu$, die gegen P_0 strebt.

Behauptung. Es gibt eine Nummer ν_0 , so daß $F \cap L_\nu \neq \emptyset$ für $\nu \geq \nu_0$ ist.

Hieraus folgt unmittelbar ein entsprechender Satz für komplexe Kurven.

Hilfssatz 8.5. Voraussetzung. Dieselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz 8.4 werden gemacht mit der Ausnahme: F braucht keine rein 2-dimensionale analytische Menge zu sein, es sei F aber eine komplexe Kurve aus D mit $F \cap N = \overline{F} \cap N = \{P_0\}$.

Behauptung. Es gibt eine Nummer ν_0 , so daß $F \cap L_\nu \neq \emptyset$ für $\nu \geq \nu_0$ ist.

Man kann auch P_0 als gewöhnlichen Punkt von F statt von N voraussetzen:

Hilfssatz 8.6. Voraussetzung. 1. Im Polyzylinder $D = \{\delta \mid |z_1| < a, |z_2| < b\}$ sei eine rein 2-dimensionale analytische Menge N gegeben, die den Kreis $F = \{\delta \mid |z_1| < a, z_2 = 0\}$ im Nullpunkt und nur im Nullpunkt schneidet.

2. In D seien abzählbar viele analytische Mengen L_v der reinen Dimension 2 gegeben. Der Durchschnitt $L_v \cap L_\mu$ bestehe für $\mu \neq v$ nur aus isolierten Punkten.

In $D_1 = D - N$ sei $D_1 \cap \bigcup_{v=1}^{\infty} L_v$ analytisch.

3. Es gebe eine Nullfolge $\delta_v \in L_v$.

Behauptung. Es gibt eine Nummer v_0 , so daß $L_v \cap F \neq \emptyset$ für $v \geq v_0$ ist.

Beweis. Für zwei Zahlen a_1, b_1 mit $0 < a_1 < a$ und $0 < b_1 < b$ ist $N \cap \{\delta \mid |z_1| = a_1, |z_2| \leq b_1\} = \emptyset$. Da $D_1 \cap \bigcup_{v=1}^{\infty} L_v$ in D_1 analytisch ist, und da $\{\delta \mid |z_1| = a_1, |z_2| \leq b_1\}$ eine kompakte Teilmenge von D_1 ist, gibt es eine Nummer v_0 , so daß $L_v \cap \{\delta \mid |z_1| = a_1, |z_2| \leq b_1\} = \emptyset$ für $v \geq v_0$ ist. Zugleich kann man v_0 so groß wählen, daß die Punkte δ_v zu $D^* = \{\delta \mid |z_1| < a_1, |z_2| < b_1\}$ gehören. Wegen $\delta_v \in L_v \cap D^*$ für $v \geq v_0$ schneidet L_v den Kreis $F \cap D^*$ für $v \geq v_0$, w. z. b. w.

Hieraus folgt unmittelbar:

Hilfssatz 8.7. Voraussetzung. Dieselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz 8.4 werden gemacht mit der Ausnahme: Der Punkt P_0 ist nicht notwendig ein gewöhnlicher Punkt von N , aber ein gewöhnlicher Punkt von F .

Behauptung. Es gibt eine Nummer v_0 , so daß $F \cap L_v \neq \emptyset$ für $v \geq v_0$ ist.

Hilfssatz 8.8. Voraussetzung. Dieselben Voraussetzungen wie in Hilfssatz 8.5 werden gemacht mit der Ausnahme: Der Punkt P_0 ist nicht notwendig gewöhnlicher Punkt von N , aber ein gewöhnlicher Punkt von F .

Behauptung. Es gibt eine Nummer v_0 , so daß $F \cap L_v \neq \emptyset$ für $v \geq v_0$ ist.

§ 9. Streumengen bei meromorphen Modifikationen.

Nun werden die Grundlagen geschaffen, die es ermöglichen werden, eine gegebene beiderseits offene, meromorphe Modifikation durch σ -Prozesse zu erzeugen.

Definition 9.1. Häufungsmenge.

Im topologischen Raum G seien Mengen L_v für $v = 1, 2, \dots$ gegeben. Der Punkt $Q \in G$ gehöre dann und nur dann zu S , wenn für jede Umgebung U von Q unendlich viele der Mengen $U \cap L_v$ nicht leer sind. Es heiße S die Häufungsmenge der Mengen L_v .

Satz 9.1. Streumengensatz (Teil I).

Voraussetzung. 1. Die Modifikation $\mathfrak{M} \left(\begin{smallmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{smallmatrix} \right)$ sei offen.

2. In einer offenen Umgebung U von M liege eine zusammenhängende komplexe Kurve L , die in U abgeschlossen ist. Es sei $\bar{L}$ kompakt. Es sei $L \cap M = \{P_0\}$

und τ verhalte sich längs L im Punkt P_0 bestimmt. Es sei $\tilde{L} = \tau(L, L)$ und $Q_0 = \tau(P_0, L)$.

3. In U sei zu jeder natürlichen Zahl v eine zusammenhängende komplexe Kurve L_v gegeben, die in U abgeschlossen ist und in M nur in endlich vielen Punkten schneidet. In jedem Punkt von $M \cap L_v$ verhalte sich die Abbildung τ längs L_v bestimmt. Es sei $\tilde{L}_v = \tau(L_v, L_v)$.

4. Für $\mu \neq v$ bestehe $L_v \cap L_\mu$ höchstens aus isolierten Punkten. Es bestehe $L \cap L_v$ höchstens aus isolierten Punkten.

5. Es sei $\tilde{S}$ die Häufungsmenge der Mengen $\tilde{L}_v \cap B$; es werden $V = \tau(U \cap A) \cup N$ und $C = \tilde{S} \cap V - \tilde{L} \cap B$ gesetzt. Es sei $C - \{Q_0\}$ nicht leer.

6. Zu jeder Umgebung W von $\tilde{L}$ gebe es eine Nummer v_W , so daß $L_v \subset W$ für $v \geq v_W$ ist.

7. Die kleinste analytische Menge aus V , die N enthält, sei N^* . Die irreduziblen Teile von N^* mögen mittels einer Indexmenge Λ numeriert und mit N_λ^* bezeichnet werden. Es sei $\dim N^* \leq 2$.

Behauptung. 1. Die Indexmenge Λ enthält eine nichtleere Teilmenge Λ_0 , für die $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} N_\lambda^*$ gilt. In H ist C analytisch.

2. Es ist $Q_0 \in C \subseteq \Sigma(P_0) \subseteq N$.

3. Für $\lambda \in \Lambda_0$ hat N_λ^* die Dimension 2.

4. Der Durchschnitt von $V - (\tilde{L} \cap B)$ mit der Häufungsmenge der Menge $\tilde{L}_v$ ist C .

Beweis. a) In U sind L_v und L irreduzible analytische Mengen der Dimension 2. Nach Satz 2.12 sind dann auch

$$(9.1) \quad V \cap \overline{\tau(L_v \cap A)} = \tau(L_v, L_v) = \tilde{L}_v$$

und

$$(9.2) \quad V \cap \overline{\tau(L \cap A)} = \tau(L, L) = \tilde{L}$$

irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 aus V , die N nur in endlich vielen Punkten, nämlich in $\tau(M, L_v)$ bzw. in $\tau(M, L)$ schneiden. Es ist $\tilde{L} \cap N = \tilde{L} \cap N = \{Q_0\}$ und $\tilde{L}$ eine komplexe Kurve aus H . Es bestehen $\tilde{L} \cap L_v$ und $\tilde{L}_\mu \cap \tilde{L}_v$ für $\mu \neq v$ höchstens aus isolierten Punkten.

b) Ist K ein kompakter Teil von $U - L$, so ist $W = G - K$ eine Umgebung von $\tilde{L}$, also $L_v \subset W$ für $v \geq v_W$; es ist $L_v \cap K$ für $v \geq v_W$ leer. Daher ist $F = \bigcup_{v=1}^{\infty} (L_v - L)$ in $U - L$ analytisch und hat die Mengen $L_v - L$ als irreduzible Teile. In $V - N - \tilde{L} = \tau(U - L - M)$ ist $F^* = \tau(F \cap A)$ analytisch und rein 2-dimensional. Es sei V_1 die Menge der Punkte aus V , in denen F^* regulär ist. Da $N \cup \tilde{L} \subseteq N^* \cup \tilde{L}$ und $N^* \cup \tilde{L}$ in V eine 2-dimensionale analytische Menge ist, erhält man in $\tilde{F} = \overline{\tau(F \cap A)} \cap V_1$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V_1 , die in $S = V - V_1 \subseteq N \cup \tilde{L}$ singulär ist. Es ist $\tilde{L}_v \cap V \cap B$ ein irreduzibler Teil von F^* , also $\tilde{L}_v \cap V_1 = \tilde{L}_v \cap V_1$ ein irreduzibler Teil von $\tilde{F}$.

Daher ist $\bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}_v \cap V_1$ eine in $\tilde{F}$ gelegene analytische Menge aus V_1 , die F^* umfaßt. Da aber $\tilde{F}$ die kleinste analytische Menge aus V_1 ist, die F^* umfaßt, so ist

$$(9.3) \quad \tilde{F} = \bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}_v \cap V_1.$$

Da $\tilde{F}$ auf S singulär ist und S in einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge $N^* \cup \tilde{L}$ aus V liegt, ist S leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V .

c) *Es wird $C = S - (B \cap \tilde{L})$ behauptet.* Da C der in $V - B \cap \tilde{L}$ gelegene Teil der Häufungsmenge $\tilde{S}$ der irreduziblen Teile $\tilde{L}_v \cap B$ von F^* ist, wird F^* in jedem Punkt von C singulär. Also ist $C \subseteq V - V_1 = S$ und wegen $C \subseteq V - B \cap \tilde{L}$ sogar $C \subseteq S - B \cap \tilde{L}$. Ist $P \in S$, so ist F^* in P singulär; ist X eine Umgebung von P , so dringen unendlich viele irreduzible Teile von F^* in $X \cap V$ ein, da sonst F^* in $P \in X \cap V$ regulär wäre. Die irreduziblen Teile von F^* sind aber $\tilde{L}_v \cap B$; daher gehört P zu S . Es ist $S - B \cap \tilde{L} \subseteq \tilde{S} \cap V - B \cap \tilde{L} = C$. Insgesamt folgt $C = S - (B \cap \tilde{L})$.

d) *Es wird $S = C \cup \tilde{L}$ behauptet.* Es ist

$$(9.4) \quad S \subseteq (S - B \cap \tilde{L}) \cup \tilde{L} = C \cup \tilde{L}.$$

Ein Punkt $Q_1 \in \tilde{L} \cap B$ werde gewählt. Nach Voraussetzung 6 gehört L zur Häufungsmenge der irreduziblen Teile $L_v - L$ der in $U - L$ analytischen Menge F , also ist F in $v(Q_1) = P_1$ singulär. Dann ist auch $F \cap A$ in P_1 und somit auch $F^* = \tau(F \cap A)$ in $\tau(P_1) = Q_1$ singulär. Da $\tilde{L}$ irreduzibel und $F^* \cap B$ in $V - \tilde{L} - N^*$ analytisch ist, ist F^* in ganz $\tilde{L}$ singulär. Es ist $\tilde{L} \subseteq S$, also gilt

$$(9.5) \quad \tilde{L} \cup C \subseteq S \cup C \subseteq S \subseteq C \cup \tilde{L} \quad \text{d.h.} \quad \tilde{L} \cup C = S.$$

e) *Es ist $Q_0 \in C \subseteq N$; denn es ist*

$$(9.6) \quad Q_0 \in \tilde{L} \cap N \subseteq S \cap N = (S - (B \cap \tilde{L})) \cap N = C \cap N$$

und

$$\begin{aligned} C &= S - (B \cap \tilde{L}) \subseteq V - (V - N - \tilde{L}) - B \cap \tilde{L} \\ &\subseteq (N \cup \tilde{L}) - (B \cap \tilde{L}) \subseteq N \cup (\tilde{L} - B) = N. \end{aligned}$$

f) *Es wird $C \subseteq \Sigma(P_0)$ behauptet.* Ist nämlich $Q_1 \in C$, so dringen in jede Umgebung von Q_1 unendlich viele $\tilde{L}_v \cap B$ ein. Da außerdem $\tilde{L}_v \cap \tilde{L}_\mu$ für $\mu \neq v$ nur aus isolierten Punkten besteht, gibt es eine Folge μ_v mit $\mu_v > \mu_{v-1}$ und eine Punktfolge $Q^v \in \tilde{L}_{\mu_v} \cap B$ mit $Q^v \notin \tilde{L}_0$ für $Q^v \neq \mu_v$, so daß $Q^v \rightarrow Q_1 \in N$ für $v \rightarrow \infty$ strebt. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $P^v = \tau(Q^v) \rightarrow P_1$ mit $P_1 \in M$. Da P^v zu $L_{\mu_v} \cap A$ aber zu keinem L_0 mit $Q^v \neq \mu_v$ gehört, ist P_1 ein Punkt der Häufungsmenge der Folge L_v . Daher ist $P_1 \in \bar{L} \cap M = \{P_0\}$, also $P_1 = P_0$. Es ist $Q_1 \in \Sigma(P_0)$, woraus $C \subseteq \Sigma(P_0)$ folgt.

g) Nun wird behauptet, daß durch Q_0 noch wenigstens ein von $\tilde{L}$ verschiedener irreduzibler Teil der rein 2-dimensionalen analytischen Menge S geht.

Es gibt nämlich nach Voraussetzung einen Punkt $Q^* \in C - \{Q_0\} = C - \tilde{L}$. Da $\tilde{L}$ kompakt ist, haben Q^* und $\tilde{L}$ offene Umgebungen $Y \ni Q^*$ und $Z \supset \tilde{L}$, für die $\bar{Y}$ und $\bar{Z}$ kompakt und punktfremd sind. Man bestimmt offene Umgebungen $X_v \subseteq Z$ von Q_0 , für die $\bar{X}_{v+1} \subset X_v \subset U$ und $\bigcap_{v=1}^{\infty} X_v = \bigcap_{v=1}^{\infty} \bar{X}_v = \{Q_0\}$ gelten möge. Die kompakte Menge $\tilde{L} - X_v$ hat eine offene Umgebung $Z_v \subseteq Z$ mit $\bar{Z}_v \subseteq A$. Die Vereinigung $W_v = X_v \cup Z_v \subseteq Z$ ist offen und $\bar{W}_v$ kompakt.

Die Teilmenge der Kurven L_v , für die $\tilde{L}_v \cap B \cap Y \neq \emptyset$ ist, erfüllt wieder die Voraussetzungen von Satz 9.1; denn zur Häufungsmenge $\tilde{S}_0$ der $\tilde{L}_v$ mit $B \cap \tilde{L}_v \cap Y = \emptyset$ gehört der Punkt $Q^* \in V - \tilde{L}$. Daher gehört auch Q_0 zu $\tilde{S}_0$. Die Umgebung W_v von Q_0 werde nun festgehalten. Es gibt unendlich viele $\tilde{L}_{\mu_\lambda}$, für die $\tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap W_v \neq \emptyset$ und $B \cap \tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap Y \neq \emptyset$ sind. Es ist aber $(\tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap \bar{W}_v) \cap (B \cap L_{\mu_\lambda} \cap \bar{Y}) = \emptyset$. Da $\tilde{L}_\mu$ linear zusammenhängend ist, gibt es einen Punkt $R^{\mu_\lambda} \in \tilde{L}_{\mu_\lambda} \cap (\bar{W}_v - W_v)$. Da der Durchschnitt $(\bar{W}_v - W_v) \cap \tilde{L}_{\mu_\lambda}$ überabzählbar viele Punkte enthält, kann man $R^{\mu_\lambda} \notin \tilde{L}_\varrho$ für $\varrho \neq \mu_\lambda$ annehmen. Die abgeschlossene Teilmenge $\bar{W}_v - W_v$ von $\bar{Z}$ ist kompakt. Daher hat die Folge R^{μ_λ} einen Häufungspunkt R_v in $\bar{W}_v - W_v$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge R^{μ_λ} strebt $R^{\mu_\lambda} \rightarrow R_v$ für $\lambda \rightarrow \infty$.

Angenommen es ist $R_v \in B$. Der Punkt $R_v^* = v(R_v)$ liegt in

$$(9.8) \quad v((\bar{W}_v - W_v) \cap B) \subseteq v(B - W_v) \subseteq v(B - \tilde{L}) = A - \bar{L}.$$

Daher gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset A$ von R_v^* mit $K \cap \bar{L} = \emptyset$. Es ist $W = G - K$ eine offene Umgebung von $\bar{L}$. Für $v \geq v_W$ ist $L_v \subset W$, also $L_v \cap K = \emptyset$, woraus $\tilde{L}_v \cap \tau(K) = \emptyset$ für $v \geq v_W$ folgt. Da $\tau(K)$ eine Umgebung von $R_v^* = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R^{\mu_\lambda}$ ist, gibt es eine Nummer λ_0 , so daß $R^{\mu_\lambda} \in \tau(K)$ für $\lambda \geq \lambda_0$ ist. Es strebt $\mu_\lambda \rightarrow \infty$ für $\lambda \rightarrow \infty$. Daher gibt es ein $\lambda_1 \geq \lambda_0$ mit $\mu_{\lambda_1} \geq v_W$ und es entsteht der Widerspruch:

$$(9.9) \quad R^{\mu_{\lambda_1}} \in \tau(K) \cap \tilde{L}_{\mu_{\lambda_1}} = \emptyset.$$

Weil die Annahme falsch war, ist $R_v \in N$. Es folgt

$$(9.10) \quad R_v \in N \cap (\bar{W}_v - W_v) \subseteq N \cap (\bar{W}_v - \tilde{L}) \subseteq N \cap (\bar{X}_v \cup \bar{Z}_v) - \tilde{L} = N \cap \bar{X}_v - \tilde{L}.$$

Da in jede Umgebung von R_v unendlich viele $\tilde{L}_v$ eindringen, ist $R_v \in S$, also $R_v \in S \cap N \cap \bar{X}_v - \tilde{L} = C \cap \bar{X}_v - \tilde{L}$. Weil aber $\bigcap_{v=0}^{\infty} X_v = \bigcap_{v=0}^{\infty} \bar{X}_v = \{Q_0\}$ mit $\bar{X}_{v+1} \subset X_v$ und $\bar{X}_v$ kompakt ist (als abgeschlossene Teilmenge von $\bar{Z}$), strebt $R_v \rightarrow Q_0$ für $v \rightarrow \infty$. Wegen $R_v \in S - \tilde{L}$ geht ein von $\tilde{L}$ verschiedener irreduzibler Teil der analytischen Menge S durch Q_0 .

h) Es ist $\tilde{L}$ kein irreduzibler Teil von N^* ; wäre nämlich $\tilde{L}$ einer, so wäre die Vereinigung $\tilde{N}^*$ aller $N_\lambda^* \neq \tilde{L}$ eine analytische Menge in V , die $S - \tilde{L}$ umfaßt. In S liegt eine 2-dimensionale irreduzible analytische Menge, die von $\tilde{L}$ verschieden ist und Q_0 enthält, und wegen $S - \tilde{L} \subseteq \tilde{N}^*$ gehört diese zu $\tilde{N}^*$. Daher ist $N = \{Q_0\} \cup (N - \tilde{L}) \subseteq \tilde{N}^*$. Da aber $\tilde{N}^* \subset N^*$ und N^* minimal gewählt war, entsteht ein Widerspruch. Es ist $\tilde{L}$ kein irreduzibler Teil von N^* . Es sei $A_0 \subseteq A$ die Menge der Indizes λ , für die N_λ^* irreduzibler Teil von S ist. Es ist $\bigcup_{\lambda \in A_0} N_\lambda^* \subseteq S$ eine analytische Menge aus V , jeder von $\tilde{L}$ verschiedene irreduzible Teil von S liegt in $N \subseteq N^*$, ist also irreduzibler Teil von N^* . Daher ist

$$(9.11) \quad S = \bigcup_{\lambda \in A_0} N_\lambda^* \cup \tilde{L}.$$

Da durch Q_0 ein von $\tilde{L}$ verschiedener irreduzibler Teil von S geht und $N_\lambda^* \cap B$ für $\lambda \in A_0$ leer ist, gilt

$$(9.12) \quad C = S - (B \cap \tilde{L}) = \bigcup_{\lambda \in A_0} N_\lambda^*.$$

In V ist C analytisch mit der reinen Dimension 2. Da N in H abgeschlossen und C in N enthalten ist, ist C abgeschlossen (in H); also ist C analytisch in H .

i) Die Häufungsmenge der Menge $\tilde{L}_v$ sei $\tilde{S}'$ und $C' = V \cap \tilde{S}' - \tilde{L} \cap B$. Es ist $\tilde{S}' \supseteq \tilde{S}$, also $C' \supseteq C$. Da durch jede Umgebung eines beliebigen Punktes von $C' \subseteq V$ unendlich viele $\tilde{L}_v$, also auch unendlich viele $\tilde{L}_v \cap B$ gehen, ist $C' \subseteq C$; insgesamt folgt $C = C'$. Die Behauptungen 1 bis 4 gelten, w. z. b. w.

Unter gewissen Voraussetzungen ordnet dieser Satz einem Punkt P_0 eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C \subseteq \Sigma(P_0)$ zu. Wie sich später zeigen wird, lassen sich diese Voraussetzungen erfüllen, wenn τ in P_0 streut. Damit ist die in der Einleitung zu Teil III geforderte Zuordnung $P_0 \rightarrow C(P_0)$ hergestellt. Nun muß noch, was etwas schwieriger ist, gezeigt werden, daß diese Zuordnung eineindeutig ist. Dies geschieht, indem gezeigt wird, daß v auf $C = C(P_0)$ abgesehen von isolierten Punkten regulär ist. Wegen $C(P_0) \subseteq \Sigma(P_0)$ ist dann $P_0 = v(Q, H)$ auf $C(P_0)$ abgesehen von isolierten Punkten. Also besteht $C(P_0) \cap C(P_1)$ für $P_0 \neq P_1$ höchstens aus isolierten Punkten, die Zuordnung ist also eineindeutig.

Satz 9.2. Streumengensatz (Teil II).

Voraussetzung. 1. Die Modifikation $\mathfrak{M} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei meromorph und beiderseits offen.

2. bis 7. wie Satz 9.1 mit denselben Bezeichnungen.

8. Der Durchschnitt $L_v \cap (M \cup L)$ enthalte höchstens q Punkte, wobei q nicht von v abhängt.

Behauptung. Neben den Aussagen 1 bis 4 von Satz 9.1 gilt:

5. Die Teilmenge D von C , in der v singulär ist, hat in H keinen Häufungspunkt.

6. Auf $C - D$ verhält sich v bestimmt und wird durch $v(Q, H)$ aus B analytisch in $B \cup (C - D)$ fortgesetzt. Für $Q \in C - D$ ist $v(Q, H) = P_0$.

Beweis. a) Ist v in einem Punkt $Q^0 \in \Sigma(P_0)$ regulär, so ist v in Q^0 bestimmt, und $v(Q, H)$ in einer Umgebung von Q^0 analytisch. Es gibt eine Folge $Q'' \in B$ mit $\lim_{v \rightarrow \infty} Q'' = Q^0$, für die $v(Q'') \rightarrow P_0$ strebt. Daher ist $v(Q^0, H) = P_0$. Die Behauptung 6 ist bewiesen.

b) Ein Punkt $R \in C$ werde beliebig gewählt. Er liegt in einer Karte $U_\alpha \subset V$ mit $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$, wobei $\alpha(0) = R$ sei. Es seien

$$(9.13) \quad U'_\alpha = \alpha^{-1}(U_\alpha), \quad C' = \alpha^{-1}(U_\alpha \cap C),$$

$$(9.14) \quad N' = \alpha^{-1}(U_\alpha \cap N), \quad N^{*'} = \alpha^{-1}(N^* \cap U_\alpha),$$

$$(9.15) \quad \tilde{L}' = \alpha^{-1}(\tilde{L} \cap U_\alpha), \quad \tilde{L}'_v = \alpha^{-1}(\tilde{L}_v \cap U_\alpha),$$

$$(9.16) \quad S = C \cup \tilde{L}, \quad S' = \alpha^{-1}(S \cap U_\alpha),$$

$$(9.17) \quad V_1 = V - S, \quad V'_1 = \alpha^{-1}(V_1 \cap U_\alpha).$$

Da die Menge $\tilde{L}' \cup N^{*'} \cup \bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}'_v$ höchstens abzählbar viele irreduzible Teile enthält, kann man das Koordinatensystem so wählen, daß die Achsen $\{z | z_1 = 0\}$ und $\{z | z_2 = 0\}$ mit dieser Menge höchstens abzählbar viele Punkte gemeinsam haben. Man kann $\eta_1 > 0$ so wählen, daß

$$(9.18) \quad \{z | |z_1| \leq \eta_1, |z_2| \leq \eta_1\} \subset U'_\alpha,$$

$$(9.19) \quad \{z | z_1 = 0, 0 < |z_2| \leq \eta_1\} \cap (\tilde{L}' \cup N^{*'}) = \emptyset$$

ist. Nach dem Beweis von Satz 9.1 ist $\bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}_v \cap V_1$ in jedem Punkt von $\{z | z_1 = 0, 0 < |z_2| \leq \eta_1\}$ regulär und hat daher mit diesem punktierten Kreis nur isolierte Punkte gemeinsam. Man kann Zahlen η, η_2 und η_3 finden, so daß gilt:

$$(9.20) \quad 0 < \eta_3 < \eta_1, \quad 0 < \eta_2 - \eta < \eta_2 < \eta_2 + \eta < \eta_1,$$

$$(9.21) \quad Y = \{z | |z_1| < \eta_3, |z_2| < \eta_2\}, \quad \bar{Y} \subset U'_\alpha,$$

$$\{z | |z_1| \leq \eta_3, ||z_2| - \eta_2| < \eta\} \cap \left(\tilde{L}' \cup N^{*'} \cup \bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}'_v \right) = \emptyset,$$

daß im Falle $R \neq Q_0$ außerdem $Q_0 \notin \alpha(\bar{Y})$ ist, und daß $Y \cap (\tilde{L}' \cup N^{*'})$ außer dem Nullpunkt nur gewöhnliche Punkte enthält, in denen $\tilde{L}' \cup N^{*'}$ die Dimension 2 hat. Da der Nullpunkt zu C' gehört, also ein 2-dimensionaler irreduzibler Teil von $N^{*'}$ durch den Nullpunkt geht, hat $Y \cap (\tilde{L}' \cup N^{*'})$ die reine Dimension 2. Man kann eine Zahl r finden, so daß für jede Zahl c mit $|c| \leq \eta_3$ der Kreis

$$(9.23) \quad E_c = \{z | z_1 = c, |z_2| < \eta_2 + \eta\}$$

in höchstens r Punkten die Menge $\tilde{L}' \cup N^{**}$ schneidet. Da $\tilde{L}' \cup N^{**}$ den Kreis E_0 nur im Nullpunkt schneidet, geht jeder irreduzible Teil von $Y \cap (\tilde{L}' \cup N^{**})$ durch den Nullpunkt. Es hat $Y \cap (\tilde{L}' \cup N^{**})$ höchstens r irreduzible Teile.

Zu jedem Punkt $c \in Y \cap S'$ lassen sich zwei Zahlen δ_c, η_c bestimmen, so daß mit $c = (c_1, c_2)$ gilt:

$$(9.24) \quad 0 < \delta_c \leq \eta_3 - |c_1|, \quad 0 < \eta_c \leq \eta_2 - |c_2|,$$

$$(9.25) \quad Y(c) = \{\zeta \mid |z_1 - c_1| < \delta_c, |z_2 - c_2| < \eta_c\} \subseteq Y,$$

$$(9.26) \quad \{\zeta \mid z_1 = c_1, 0 < |z_2 - c_2| \leq \eta_c\} \cap (N^{**} \cup \tilde{L}') = \emptyset,$$

$$(9.27) \quad \{\zeta \mid |z_1 - c_1| \leq \delta_c, |z_2 - c_2| = \eta_c\} \cap \left(N^{**} \cup \tilde{L}' \cup \bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}'_v \right) = \emptyset,$$

$$(9.28) \quad 0 \notin \bar{Y}(c) \quad \text{für } c \neq 0, \quad c \in Y \cap S',$$

$$(9.29) \quad Y(0) = Y \quad \text{also} \quad \delta_0 = \eta_3 \quad \text{und} \quad \eta_0 = \eta_2,$$

$$(9.30) \quad \bar{Y}(c) \cap N^{**} = \bar{Y}(c) \cap C' \quad \text{für } c \in C', \quad c \neq 0^9).$$

Für alle c mit $|c - c_1| \leq \delta_c$ ist wegen (9.27) der Durchschnitt $\tilde{L}'_v \cap E_c \cap Y(c) \neq \emptyset$, falls nur $\tilde{L}'_v \cap Y(c)$ nicht leer ist.

c) Ein Punkt $c \in Y \cap S'$ gehöre dann und nur dann zur Menge Ω , wenn gilt:
„Es gibt eine Nummer v_c , so daß $c = (c_1, c_2) \in \tilde{L}'_{v_c}$ für alle $v \geq v_c$ ist, falls nur $\tilde{L}'_v \cap Y(c) \cap E_{c_1} \neq \emptyset$ ist.“

Nun wird behauptet, daß Ω aus höchstens $r q + 1$ Punkten besteht.

Angenommen auf einem irreduziblen Teil S'_0 von $Y \cap S'$ liegen $q + 1$ verschiedene Punkte $\zeta_\varrho \in \Omega$ mit $\zeta_\varrho \neq 0$ ($\varrho = 1, \dots, q + 1$). Da $S'_0 - \{\zeta \mid \zeta = 0\}$ eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2 aus Y ist, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, gibt es eine zweimal stetigdifferenzierbare Kurve $\mathfrak{C} = \{\zeta \mid \zeta = \zeta(t), 0 \leq t \leq 1\} \subset S'_0 - \{\zeta \mid \zeta = 0\}$, für die $\zeta'(t) \neq 0$ für $0 \leq t \leq 1$ und $\zeta(t_\varrho) = \zeta_\varrho = (a_\varrho, b_\varrho)$ für $\varrho = 1, \dots, q + 1$ mit $0 < t_1 < \dots < t_{q+1} < 1$ gilt.

Die komplexe Normale¹⁰⁾ auf $S'_0 - \{\zeta \mid \zeta = 0\}$ im Punkt $\zeta(t)$ sei $n(t)$. Sie ist stetigdifferenzierbar in $0 \leq t \leq 1$. Nun kann man eine Zahl $\varepsilon > 0$ bestimmen, so daß gilt

1. Für jeden Parameterwert $0 \leq t \leq 1$ sei

$$(9.31) \quad X(t) = \{\zeta \mid \zeta = \zeta(t) + u n(t) \text{ mit } |u| < \varepsilon\},$$

⁹⁾ Durch $c \in C'$ geht nämlich ein irreduzibler Teil von $\tilde{L}' \cup N^{**}$; da c gewöhnlicher Punkt von $\tilde{L}' \cup N^{**}$ ist, geht auch nur ein solcher irreduzibler Teil durch $c \neq 0$, der dann auch ein irreduzibler Teil von C' ist. Daher stimmen $\tilde{L}' \cup N^{**}$ und C' in einer Umgebung von c überein.

¹⁰⁾ Ist $\zeta(u)$ eine örtliche Parameterdarstellung von S'_0 , so ist

$$n = \left(-\frac{\bar{z}'_2(u)}{|\zeta'(u)|}, \frac{\bar{z}'_1(u)}{|\zeta'(u)|} \right)$$

die komplexe Normale in $\zeta(u)$.

mit

$$(9.32) \quad \bar{X}(t) \subset Y$$

und $\bar{X}(t) \cap S' = \bar{X}(t) \cap S'_0$ bestehe nur aus dem einen Punkt $z(t)$.

2. Es seien

$$(9.33) \quad \mathfrak{S} = \{z \mid z = z(t) + u n(t) \text{ mit } |u| = \varepsilon \text{ und } 0 \leq t \leq 1\} \subset V'_1,$$

$$(9.34) \quad X = \bigcup_{0 < t < 1} X(t) \subset Y.$$

3. Es gelte $\bar{X}(t_\varrho) \subset Y(z_\varrho)$ für $\varrho = 1, \dots, q+1$.

Da $\bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}'_v \cap V'_1$ in V'_1 analytisch und $\mathfrak{S} \subset V'_1$ kompakt ist, gehen nur endlich viele $\tilde{L}'_v$ durch $\mathfrak{S}$, d.h., es gibt eine Nummer ν^* , so daß $\tilde{L}'_v \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ für alle $\nu \geq \nu^*$ ist. Weil Y ein Polyzylinder ist, gibt es eine in Y analytische Funktion f_ν , deren Nullstellen gerade $Y \cap \tilde{L}'_\nu$ ergeben. Für $\nu \geq \nu^*$ ist $f_\nu(z) \neq 0$ auf $\mathfrak{S}$ also $f_\nu(z(t) + u n(t)) = g_\nu(u, t) \neq 0$ für $|u| = \varepsilon$ und $0 \leq t \leq 1$. Bei festem t in $0 \leq t \leq 1$ ist $g_\nu(u, t)$ analytisch für $|u| \leq \varepsilon$. Die Anzahl der Nullstellen u in $|u| < \varepsilon$ der Funktion $g_\nu(u, t)$ sei $n_\nu(t)$. Dann ist

$$(9.35) \quad n_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} \frac{g_{\nu u}(u, t)}{g_\nu(u, t)} du \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

Da das Integral in $0 \leq t \leq 1$ stetig und $n_\nu(t)$ ganzzahlig ist, ist $n_\nu(t)$ konstant. Wenn $X_\nu(t) \cap \tilde{L}'_\nu \neq \emptyset$ für ein t in $0 \leq t \leq 1$ ist, so für jedes t in $0 \leq t \leq 1$, falls nur $\nu \geq \nu^*$ ist.

Weil $\bigcup_{v=1}^{\infty} \tilde{L}'_v \cap V'_1$ in $z_1 \in S'$ singulär ist, gibt es eine Nummer $\mu > \text{Max}(\nu^*, \nu_{z_1}, \dots, \nu_{z_{q+1}})$, für die $\tilde{L}'_\mu \cap Y(z_1) \neq \emptyset$ also auch, wie (9.27) zeigt, $\tilde{L}'_\mu \cap Y(z_1) \cap E_{a_1} \neq \emptyset$ ist. Wegen $z_1 \in \mathfrak{Q}$ ist z_1 in $\tilde{L}'_\mu$ enthalten. Es ist $z_1 \in \tilde{L}'_\mu \cap X(t_1) \neq \emptyset$, also auch $\tilde{L}'_\mu \cap X(t_\varrho) \subseteq \tilde{L}'_\mu \cap Y(z_\varrho)$ für $\varrho = 1, \dots, q+1$ nicht leer. Daher ist $\tilde{L}'_\mu \cap Y(z_\varrho) \cap E_{a_\varrho} \neq \emptyset$ für $\varrho = 1, \dots, q+1$. Wegen $z_\varrho \in \mathfrak{Q}$ und $\mu > \nu_{z_\varrho}$ ist $z_\varrho \in \tilde{L}'_\mu$ für $\varrho = 1, \dots, q+1$. Daher besteht $\tilde{L}'_\mu \cap S'$ aus mindestens $q+1$ verschiedenen Punkten. Andererseits enthält nach Voraussetzung $L_\mu \cap (M \cup L)$ höchstens q Punkte. Folglich besteht $\alpha^{-1} \tau(L_\mu \cap (M \cup L), L_\mu)$ aus höchstens q Punkten. Es ist

$$(9.36) \quad \tilde{L}'_\mu \cap S' \subseteq \alpha^{-1}(\tilde{L}'_\mu \cap (N \cup \tilde{L})) \subseteq \alpha^{-1} \tau(L_\mu \cap (M \cup L), L_\mu).$$

woraus der Widerspruch $q+1 \leq q$ folgt.

Auf jedem der höchstens r irreduziblen Teile von $Y \cap S'$ liegen höchstens q vom Nullpunkt verschiedene Punkte von $\mathfrak{Q}$. Daher enthält $\mathfrak{Q} \subseteq S' \cap Y$ höchstens $r q + 1$ Punkte.

d) Da auf $\{z \mid z_1 = 0, 0 < |z_2| < \eta_2 + \eta\}$ kein Punkt von $\tilde{L}' \cup N^{*'}$ liegt, gibt es eine Zahl η_4 mit $0 < \eta_4 < \eta_3$, so daß auf

$$(9.37) \quad Y_1 = \{z \mid |z_1| < \eta_4, |z_2| < \eta_2\}$$

und seinem Rand kein von Null verschiedener Punkt von $\mathfrak{Q}$ liegt.

e) Für $c = (c_1, c_2) \in S'$ sei $Y(c) \cap E_{c_1} = \tilde{\mathfrak{C}}'(c)$. Die Abbildung v streut längs $\tilde{\mathfrak{C}}(c) = \alpha(\tilde{\mathfrak{C}}'(c))$ gemäß Voraussetzung 1 nicht; da die gegebene Modifikation beiderseits offen ist, verhält sich die Abbildung v in $\alpha(c)$ längs $\tilde{\mathfrak{C}}(c)$ bestimmt. Es ist also $\mathfrak{C}(c) = v(\tilde{\mathfrak{C}}(c), \tilde{\mathfrak{C}}(c))$ eine komplexe Kurve mit $\mathfrak{C}(c) \cap M = \tilde{\mathfrak{C}}(c) \cap M$, die M in genau einem Punkt schneide, und es wird behauptet, daß P_0 dieser Punkt ist, falls nur c zu $Y \cap C' - \Omega$ gehört.

Da nämlich $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}'_{\nu} \cap V'_1$ in $c \in Y \cap C'$ singularär ist, gibt es unendlich viele Nummern ν , für die $\tilde{L}'_{\nu} \cap Y(c)$ also auch $\tilde{L}'_{\nu} \cap \mathfrak{C}(c)$ nicht leer ist. Wenn außerdem $c \notin \Omega$ ist, so gehen davon unendlich viele $\tilde{L}'_{\nu}$ durch $\mathfrak{C}(c) - \{c\}$ hindurch. Es gibt eine Punktfolge $Q^{\nu} \in \tilde{L}'_{\mu_{\nu}} \cap \tilde{\mathfrak{C}}(c)$ mit $Q^{\nu} \in B$ und $\mu_{\nu} > \mu_{\nu-1}$. Auf $\tilde{\mathfrak{C}}(c) - \{c\}$ haben die Punkte $\alpha^{-1}(Q^{\nu}) = c_{\nu}$ keinen Häufungspunkt, aber auf $\tilde{\mathfrak{C}}(c)$. Daher strebt $Q^{\nu} = \alpha(c_{\nu}) \rightarrow \alpha(c) = Q \in C$. Es strebt

$$(9.38) \quad P^{\nu} = v(Q^{\nu}) = v(Q^{\nu}, \tilde{\mathfrak{C}}(c)) \rightarrow P \in M \quad \text{für} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Es ist $P^{\nu} \in L_{\mu_{\nu}}$, also dringen in jede Umgebung von P unendlich viele L_{ν} ein. Nach Voraussetzung 6 ist $P \in \bar{L}$, woraus $P \in M \cap \bar{L} = \{P_0\}$ also $P = P_0$ folgt.

f) Nun wird behauptet, daß die Abbildung v sich in jedem Punkt $R^* \neq R$ aus $\alpha(Y \cap C' - \Omega)$ bestimmt verhält.

Angenommen v verhält sich in $R^* = \alpha(c^*)$ mit $c^* \in Y \cap C' - \Omega$ nicht bestimmt, so streut v in R^* , da die Modifikation $\mathfrak{M} \left(\begin{smallmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{smallmatrix} \right)$ offen ist. Es ist $R^* \in C \subseteq \Sigma(P_0)$, also $P_0 \in \Sigma(R^*)$ nach Satz 1.2. Ein Punkt $P^* \neq P_0$ gehört zu $\Sigma(R^*)$, da v in R^* streut. Man kann eine Folge $Q^{\nu} \in B$ mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q^{\nu} = R^*$ finden, so daß $P^{\nu} = v(Q^{\nu}) \rightarrow P^*$ für $\nu \rightarrow \infty$ strebt. Es seien $\alpha^{-1}(R^*) = c^* = (c_1^*, c_2^*)$ und $\alpha^{-1}(Q^{\nu}) = c^{\nu} = (c_1^{\nu}, c_2^{\nu})$. Wären unendlich viele c^{ν} in $\tilde{\mathfrak{C}}'(c^*)$ gelegen, so gäbe es eine Teilfolge $Q^{\nu\mu} \in \tilde{\mathfrak{C}}'(c^*)$. Da $c^* \in Y \cap C' - \Omega$ ist, strebt die Folge $P^{\nu\mu} = v(Q^{\nu\mu}) \rightarrow P_0$ für $\nu \rightarrow \infty$, was falsch ist. Daher kann man $0 < |c_1^{\nu} - c_1^*| < |c_1^{\nu-1} - c_1^*|$ für $\nu = 2, 3, \dots$ und $c_1^{\nu} \neq 0$ annehmen. Außerdem kann man $c^{\nu} \in Y(c^*)$ annehmen. Es werde $\tilde{\mathfrak{C}}'_{\nu} = Y(c^*) \cap E_{c_1^{\nu}}$ gesetzt. Die komplexe Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} = \alpha(\tilde{\mathfrak{C}}'_{\nu})$ schneidet N in endlich vielen Punkten $Q_{\nu\lambda} = \alpha(c_{\nu\lambda})$ mit $c_{\nu\lambda} = (c_1^{\nu}, d_{\nu\lambda})$ für $\lambda = 1, \dots, l_{\nu}$. Es ist $\tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} \cap N = \tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} \cap N$. Da die Menge Ω nur endlich viele Punkte enthält, kann man annehmen, daß $c_{\nu\lambda}$ nicht zu Ω gehört. Gemäß (9.30) ist $c_{\nu\lambda} \in C' \cap Y(c^*) - \Omega$; nach e) verhält sich die Abbildung v in $Q_{\nu\lambda}$ längs $\tilde{\mathfrak{C}}(c_{\nu\lambda})$ also auch längs $\tilde{\mathfrak{C}}_{\nu}$ bestimmt und es strebt $v(Q) \rightarrow P_0$ für $Q \rightarrow Q_{\nu\lambda}$, wenn $Q \in \tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} \cap B$ ist. Es ist:

$$(9.39) \quad \mathfrak{C}_{\nu} = v(\tilde{\mathfrak{C}}_{\nu}, \tilde{\mathfrak{C}}_{\nu}) = v(\tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} \cap B) \cup \{P_0\},$$

$$(9.40) \quad \tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} \cap \tilde{\mathfrak{C}}_{\mu} = \emptyset \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,$$

$$(9.41) \quad Q^{\nu} \in \tilde{\mathfrak{C}}_{\nu} \cap B, \quad P^{\nu} \in \mathfrak{C}_{\nu} \cap A.$$

Die Menge

$$K = v\alpha(\{z \mid |z_1 - c_1^*| \leq \delta_{c^*}, |z_2 - c_2^*| = \eta_{c^*}\}) \subset A$$

ist kompakt und enthält $\overline{\mathfrak{U}_v} - \mathfrak{U}_v$. Nun kann man eine offene Umgebung W von P^* wählen, deren abgeschlossene Hülle $\overline{W}$ kompakt ist und keinen Punkt mit $K \cap \overline{L}$ gemeinsam hat. Bei hinreichend kleiner Umgebung W wird $M \cap W$ durch eine höchstens 2-dimensionale analytische Menge M^* aus W umfaßt, wobei M^* (bei festem W) minimal gewählt sei.

Es ist $\mathfrak{U}_v$ in W abgeschlossen und $W \cap \mathfrak{U}_v$ in A enthalten. Daher ist $W \cap \mathfrak{U}_v$ leer oder eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus W . Wegen $c^* \in Y \cap C' - \Omega$ ist $\mathfrak{U}(c^*) \cap M = \overline{\mathfrak{U}}(c^*) \cap M = \{P_0\}$ gemäß e). Da also $P^* \notin \mathfrak{U}(c^*)$ ist, kann man W so klein wählen, daß $\overline{W} \cap \mathfrak{U}(c^*)$ leer ist.

Eine Karte W_β mit $\beta \subseteq \mathfrak{P}(G)$ kann man so wählen, daß gilt:

1. Durch β wird $W'_\beta = \{w \mid |w_1| < 1, |w_2| < 1\}$ pseudokonform auf $W_\beta \subseteq W$ abgebildet, so daß $\beta(0) = P^*$ ist.

2. Für zwei Zahlen ε_1 und ε_2 in $0 < \varepsilon_1 < 1, 0 < \varepsilon_2 < 1$ trifft das Bild $\mathfrak{W}_1 = \beta(\mathfrak{W}'_1)$ von

$$(9.42) \quad \mathfrak{W}'_1 = \{w \mid |w_1| \leq \varepsilon_1, |w_2| = \varepsilon_2\}$$

die Menge M^* nicht.

3. Es ist

$$(9.43) \quad \beta(\{w \mid w_1 = 0, 0 < |w_2| < \varepsilon_2\}) \cap M^* = \emptyset.$$

4. Es seien

$$(9.44) \quad W'_1 = \{w \mid |w_1| < \varepsilon_1, |w_2| < \varepsilon_2\},$$

$$(9.45) \quad W_1 = \beta(W'_1) \quad \text{mit} \quad \overline{W}_1 \subset W,$$

$$(9.46) \quad \mathfrak{R}' = \{w \mid w_1 = 0, |w_2| < \varepsilon_2\},$$

$$(9.47) \quad \mathfrak{R} = \beta(\mathfrak{R}') \quad \text{mit} \quad \mathfrak{R} \cap M = \overline{\mathfrak{R}} \cap M = \{P^*\}.$$

Da $\mathfrak{U}(c^*) \cap W = \emptyset$ ist, hat jeder Punkt von $W \cap A$ eine Umgebung, in die nur endlich viele $\mathfrak{U}_v$ eindringen. Also ist $\bigcup_{v=1}^{\infty} \mathfrak{U}_v \cap W \cap A$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $W \cap A$ oder leer. Weil $P^\nu \rightarrow P^* \in W_1$ für $\nu \rightarrow \infty$ strebt, ist $P^\nu \in W_1$ für alle $\nu \geq \varrho_0$; weil außerdem $P^\nu \in \mathfrak{U}_v$ ist, wird $\bigcup_{v=1}^{\infty} \mathfrak{U}_v \cap W \cap A$ in P^* singular. Nach Hilfssatz 8.8 gibt es eine Nummer $\varrho_1 \geq \varrho_0$, so daß $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}_v \neq \emptyset$ für $\nu \geq \varrho_1$ ist. Die Abbildung τ verhält sich in P_0 längs $\mathfrak{R}$ bestimmt und bildet die komplexe Kurve $\mathfrak{R}$ konform auf eine komplexe Kurve $\tilde{\mathfrak{R}}$ aus H ab, für die $\tilde{\mathfrak{R}} \cap N = \tilde{\mathfrak{R}} \cap \overline{L} = \{R_1^*\}$ und $\tilde{\mathfrak{R}} \cap \overline{L} \cap B = \emptyset$ ist. Es gibt eine Punktfolge $P_\nu^* \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}_v \subseteq W \cap \mathfrak{U}_v \subseteq A$ (mit $\nu \geq \varrho_1$), für die $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu^* = P^* \in M$ ist. Es strebt $Q_\nu^* = \tau(P_\nu^*)$ gegen $\tau(P^*, \mathfrak{R}) = R_1^* \in N$. Andererseits ist $Q_\nu^* \in \tilde{\mathfrak{U}}_v$, also $\alpha^{-1}(Q_\nu^*) = c_\nu^* = (c_\nu^*, d_\nu^*)$ mit $|d_\nu^* - c_2^*| \leq \eta_{c^*}$. Es strebt $c_\nu^* \rightarrow (c_1^*, d^*) = \alpha^{-1}(R_1^*) \in \overline{Y}(c^*) \cap N' = \overline{Y}(c^*) \cap C'$, wobei $|d^* - c_2^*| \leq \eta_{c^*}$ ist. Daher ist

$$(9.48) \quad (c_1^*, d^*) = \alpha^{-1}(R_1^*) \in \overline{Y}(c^*) \cap \overline{E}_{c_1^*} \cap C'.$$

Gemäß (9.26) ist $d^* = c_2^*$ also $\alpha^{-1}(R_1^*) = c^*$ oder $R_1^* = R^*$. Es gilt also:

1°. Die in V analytische Menge $S = C \cap \tilde{L}$ der reinen Dimension 2 wird von der komplexen Kurve $\tilde{\mathfrak{K}} \cap V$ in einem und nur einem Punkt nämlich in R^* geschnitten und dieser ist ein gewöhnlicher Punkt von S , da $Q_0 \notin Y - \{R\}$ also $Q_0 \neq R^*$ ist.

Es sei $\mathfrak{J}$ die Menge der Indizes ν , für die $c^* \notin \tilde{L}'_\nu$ und $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) \neq \emptyset$ ist. Angenommen $\mathfrak{J}$ ist leer oder endlich. Dann gibt es eine Nummer ν_{c^*} , so daß entweder $c^* \in \tilde{L}'_\nu$ oder $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) = \emptyset$ ist für $\nu \geq \nu_{c^*}$. Wenn also $\nu \geq \nu_{c^*}$ und $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) \cap E_{c^*} \neq \emptyset$ ist, so ist erst recht $\tilde{L}'_\nu \cap Y(c^*) \neq \emptyset$, also $c^* \in \tilde{L}'_\nu$. Daher gehört $c^* \in Y \cap C' - \Omega \subseteq Y \cap S'$ auch zur Menge Ω , was falsch ist. Die Menge $\mathfrak{J}$ ist unendlich.

Wegen (9.26) geht jeder irreduzible Teil von $(N^{*'} \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*)$ durch c^* . Da $c^* \neq 0$ gewöhnlicher Punkt von $N^{*'} \cup \tilde{L}'$ ist, geht nur ein irreduzibler Teil von $(N^{*'} \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*)$ durch c^* . Daher ist $(N^{*'} \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*) = (C' \cup \tilde{L}') \cap Y(c^*) = S' \cap Y(c^*)$ irreduzibel. Da von der in V_1' analytischen Menge $V_1' \cup \bigcup_{\nu \in \mathfrak{J}} \tilde{L}'_\nu$ unendlich viele irreduzible Teile $\tilde{L}'_\nu \cap V_1'$ in $\bar{Y}(c^*)$ eindringen, ist $V_1' \cup \bigcup_{\nu \in \mathfrak{J}} \tilde{L}'_\nu$ in einem Punkt von $Y(c^*) - V_1' = Y(c^*) \cap S'$ singulär. Da $Y(c^*) \cap S'$ irreduzibel ist, wird $V_1' \cup \bigcup_{\nu \in \mathfrak{J}} \tilde{L}'_\nu$ in jedem Punkt von $Y(c^*) \cap S'$, insbesondere in c^* singulär. Es gibt eine Folge $c_{\mu_\nu} \in \tilde{L}'_{\mu_\nu} \cap V_1'$, die gegen c^* konvergiert. Es gilt:

2°. In V sind abzählbar viele analytische Mengen $\tilde{L}_{\mu_\nu}$ der reinen Dimension 2 gegeben. Der Durchschnitt $\tilde{L}_{\mu_\nu} \cap \tilde{L}_{\mu_\lambda}$ besteht für $\nu \neq \lambda$ nur aus isolierten Punkten. In $V_1 = V - S$ ist $V_1 \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tilde{L}_{\mu_\nu}$ analytisch.

3°. Es gibt eine Folge $Q_{\mu_\nu} = \alpha(c_{\mu_\nu}) \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap V_1$, die für $\nu \rightarrow \infty$ gegen $R^* = \alpha(c^*)$ strebt.

Nach Hilfssatz 8.4 ist $\tilde{\mathfrak{K}} \cap \tilde{L}_{\mu_\nu} \neq \emptyset$ für alle $\nu \geq Q_2$. Daher gibt es eine Folge $\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{\mathfrak{K}} \cap \tilde{L}_{\mu_\nu}$. Diese hat auf der kompakten Menge $\tilde{\mathfrak{K}}$ einen Häufungspunkt $\hat{Q}$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt

$$(9.49) \quad \hat{P}_{\mu_\nu} = v(\hat{Q}_{\mu_\nu}, \tilde{\mathfrak{K}}) \rightarrow v(\hat{Q}, \tilde{\mathfrak{K}}) = \hat{P} \in \tilde{\mathfrak{K}} \quad \text{für} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Angenommen es ist $\hat{P} \in A$. Dann ist $\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap B$ für $\nu \geq Q_3$, also $\hat{P}_{\mu_\nu} \in L_{\mu_\nu}$. Dann gehört $\hat{P}$ der Häufungsmenge der Folge L_ν an. Also ist $\hat{P} \in \tilde{\mathfrak{K}} \cap L \subseteq \bar{W} \cap L = \emptyset$, was falsch ist. Daher ist $\hat{P} \in \tilde{\mathfrak{K}} \cap M$, also $\hat{P} = P^*$ und folglich $\hat{Q} = R^*$, wie oben bewiesen wurde.

Wegen $\mu_\nu \in \mathfrak{J}$ ist $R^* \notin \tilde{L}_{\mu_\nu}$, woraus sich

$$(9.50) \quad \hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{\mathfrak{K}} \cap (\tilde{L}_{\mu_\nu} - R^*) \subseteq \tilde{\mathfrak{K}} - \{R^*\} = \tilde{\mathfrak{K}} - \tilde{\mathfrak{K}} \cap N = \tilde{\mathfrak{K}} \cap B$$

ergibt. Es ist $\hat{Q}_{\mu_\nu} \in \tilde{L}_{\mu_\nu} \cap B$, also $\hat{P}_{\mu_\nu} \in L_{\mu_\nu} \cap A$ und $P^* = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \hat{P}_{\mu_\nu} \in \bar{L}$, da $\bar{L}$ die Häufungsmenge der Mengen L_{μ_ν} ist. Man erhält $P^* \in \bar{L} \cap W = \emptyset$, womit der gewünschte Widerspruch gewonnen ist.

In jedem Punkt von $\alpha(Y \cap C' - \Sigma)$ verhält sich die Abbildung v regulär. Die Menge D der singulären Punkte von v auf C hat keinen Häufungspunkt in C und, weil C abgeschlossen ist, auch keinen in H . Die Behauptungen haben sich als richtig erwiesen, w. z. b. w.

Wie nun gezeigt wird, lassen sich die Voraussetzungen der Sätze 9.1 und 9.2 in jedem Punkt, in dem τ singulär ist, erfüllen:

Satz 9.3. Hauptsatz über meromorphe Modifikationen.

Voraussetzung. Die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei beiderseits offen und meromorph. Die Abbildung τ sei im Punkt $P_0 \in M$ singulär.

Behauptung. Die Streumenge $\Sigma(P_0)$ enthält eine rein 2-dimensionale analytische Menge C aus H . Die Menge D der singulären Punkte $Q \in C$ von v hat in H keinen Häufungspunkt. Für $Q \in C - D$ ist $v(Q, H) = P_0$; in der offenen Menge $B \cup (C - D)$ ist $v(Q, H)$ analytisch.

Beweis. Man kann eine offene Umgebung U_1 von M so wählen, daß M in einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge M^* aus U_1 und N in einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge $N^* = \tau(U_1 \cap A) \cup N$ enthalten sind. In U_1 ist eine Karte U_α mit $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ enthalten, so daß mit zwei Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in $0 < \varepsilon_1 < 1, 0 < \varepsilon_2 < 1$ gilt:

a) Durch α wird der Polyzylinder $U'_\alpha = \{z \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\alpha \subset U_1$ abgebildet, wobei $P_0 = \alpha(0)$ ist.

b) Setzt man

$$(9.51) \quad U'_2 = \{z \mid |z_1| < \varepsilon_1, |z_2| < \varepsilon_2\}, \quad U_2 = \alpha(U'_2),$$

$$(9.52) \quad \mathfrak{R} = \{z \mid |z_1| \leq \varepsilon_1, |z_2| = \varepsilon_2\}, \quad \mathfrak{R} = \alpha(\mathfrak{R}'),$$

$$(9.53) \quad L' = \{z \mid z_1 = 0, |z_2| < \varepsilon_2\}, \quad L = \alpha(L'),$$

so gilt

$$(9.54) \quad \mathfrak{R} \cap M^* = \emptyset, \quad \bar{U}_2 \subset U_1, \quad L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}.$$

c) Es gibt eine offene Umgebung $U \subset U_1$ von M , so daß

$$(9.55) \quad U \supseteq U_2, \quad U \cap \mathfrak{R} = \emptyset$$

ist. Die zusammenhängende komplexe Kurve $L \subset U$ ist in U abgeschlossen. Es ist $\bar{L}$ kompakt. In P_0 verhält sich die Abbildung τ längs L bestimmt. Es werde $\tilde{L} = \tau(L, L)$ und $Q_0 = \tau(P_0, L)$ gesetzt.

Da die Abbildung τ in P_0 singulär und die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ offen ist, streut nach Satz 2.9 die Abbildung τ in P_0 . Die Streumenge $\Sigma(P_0)$ enthält einen Punkt $Q^* \neq Q_0$. Eine Folge $P^v \in A$ mit $\lim_{v \rightarrow \infty} P^v = P_0$ und $\lim_{v \rightarrow \infty} Q^v = Q^*$ existiert. Dabei kann man $P^v \in U_2$ annehmen. Es strebt $c^v = (c_1^v, c_2^v) = \alpha^{-1}(P^v) \rightarrow \alpha^{-1}(P_0) = 0$ für $v \rightarrow \infty$. Wäre für eine Teilfolge $c_1^{v'} = 0$, so wäre $P^{v'} \in L$ und es würde $Q^{v'} = \tau(P^{v'}, L) \rightarrow \tau(P_0, L) = Q_0$ für $v' \rightarrow \infty$ streben, was falsch

ist. Daher kann man $c_1^v \neq 0$ und $|c_1^v| > |c_1^{v-1}|$ annehmen. Setzt man

$$(9.56) \quad L'_v = \{z_1 = c_1^v, |z_2| < \varepsilon_2\},$$

$$(9.57) \quad L_v = \alpha(L'_v),$$

so schneidet L_v wegen $\mathfrak{R} \cap M^* = \emptyset$ die Menge M^* also auch M in höchstens q Punkten, wobei q nicht von v abhängt. Die komplexen Kurven L_v sind zusammenhängend und in U abgeschlossen. In jedem Punkt von $L_v \cap M$ verhält sich die Abbildung τ bestimmt. Es ist $L_v \cap M = \bar{L}_v \cap M$. Es sei $\tilde{L}_v = \tau(L_v, L_v)$. Es ist

$$(9.58) \quad L_v \cap L_\mu = L_v \cap L = \emptyset \quad \text{für } v \neq \mu.$$

Die Häufungsmenge der Mengen $\tilde{L}_v \cap B$ sei $\tilde{S}$; es werden $V = \tau(U \cap A) \cup N$ und $C = \tilde{S} \cap V - \tilde{L} \cap B$ gesetzt. Da $Q^v \in \tau(L_v \cap A) = \tilde{L}_v \cap B$ ist, gehört $Q^* = \lim_{v \rightarrow \infty} Q^v$ der Menge $\tilde{S}$ an. Weil $Q^* \in N$ von Q_0 verschieden ist, enthält $C - \{Q_0\}$ den Punkt Q^* , also ist $C - \{Q_0\}$ nicht leer. Da $c_1^v \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$ strebt, ist Voraussetzung 6 von Satz 9.1 erfüllt. Da $V \subset V_1^*$ ist, läßt sich auch Voraussetzung 7 von Satz 9.1 erfüllen. Alle Voraussetzungen der Sätze 9.1 und 9.2 sind erfüllt, woraus unmittelbar die Behauptung folgt, w. z. b. w.

Der Hauptsatz über meromorphe Modifikationen gibt das Hilfsmittel, das die Erzeugung beiderseits offener meromorpher Modifikationen durch σ -Prozesse ermöglichen wird. Er stellt das Kernstück der ganzen Arbeit dar. Die Aussage des Hauptsatzes wird klarer, wenn man Mannigfaltigkeiten G und H mit abzählbarer Basis der offenen Mengen betrachtet. Dann enthalten M und N höchstens abzählbar viele verschiedene irreduzible analytische Mengen der Dimension 2, also sind die Abbildungen τ und v höchstens in abzählbar vielen Punkten singulär. Genauer gilt:

Satz 9.4. Hauptsatz über meromorphe Modifikationen.

Voraussetzung. Die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei beiderseits offen und meromorph. Die Mannigfaltigkeit H habe eine abzählbare Basis der offenen Mengen.

Behauptung. Die Menge M_0 der singulären Punkte der Abbildung τ hat in G keinen Häufungspunkt. Zu jedem Punkt $P_0 \in M_0$ gibt es eine 2-dimensionale analytische Menge $C = C(P_0)$ aus H , die in $\Sigma(P_0)$ enthalten ist, so daß die Menge $D = D(P_0)$ der singulären Punkte $Q \in C$ der Abbildung v keinen Häufungspunkt in H hat. Für $Q \in C - D$ ist $v(Q, H) = P_0$; in der offenen Menge $B \cup (C - D)$ ist $v(Q, H)$ analytisch.

Beweis. Es braucht nur noch bewiesen zu werden, daß M_0 keinen Häufungspunkt hat. Es gibt eine offene Umgebung V von N und eine in V analytische Menge N^* mit $\dim N^* \leq 2$, die N umfaßt. Da V eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, besteht N^* aus höchstens abzählbar vielen irreduziblen Teilen. Also liegen in N höchstens abzählbar viele irreduzible

analytische Mengen der Dimension 2 aus V , und da N abgeschlossen ist, ist jede in V analytische Teilmenge von N auch in H analytisch.

Die Menge der Punkte $Q \in N$, in denen v singularär ist, sei N_0 . Jedem Punkt $P_0 \in M_0$ ist nach Satz 9.3 eine rein 2-dimensionale analytische Menge $C(P_0) \subseteq \Sigma(P_0)$ aus H zugeordnet. Es hat $C(P_0) \cap N_0 = D(P_0)$ keinen Häufungspunkt in H und auf $B \cup C(P_0) - D(P_0)$ ist $v(Q, H)$ analytisch, wobei $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in C(P_0) - D(P_0)$ gilt. Für $P_0 \neq P_1$ mit $P_0 \in M_0$ und $P_1 \in M_0$ ist also

$$(9.59) \quad C(P_0) \cap C(P_1) \subseteq D(P_0) \cap D(P_1).$$

Daher haben $C(P_0)$ und $C(P_1)$ keinen irreduziblen Teil gemeinsam. Da N höchstens abzählbar viele verschiedene irreduzible analytische Mengen der Dimension 2 enthält, hat M_0 höchstens abzählbar viele Punkte.

Angenommen R ist ein Häufungspunkt von M_0 . Dann gibt es eine Folge $P_\nu \in M_0$ mit $P_\nu \neq P_\mu$ für $\mu \neq \nu$, die gegen R strebt. Man wählt für jedes ν einen Punkt $Q_\nu \in C(P_\nu) - D(P_\nu)$ und eine Folge $Q_\nu^\mu \in B \cap V$, die gegen Q_ν strebt. Dann konvergiert $P_\nu^\mu = v(Q_\nu^\mu) \rightarrow P_\nu = v(Q_\nu, H)$ für $\nu \rightarrow \infty$. Es gibt eine Karte U_α , die R enthält. O. B. d. A. kann man $P_\nu^\mu \in U_\alpha$ und $P_\nu \in U_\alpha$ annehmen. Auf U_α gibt es eine Metrik $\varrho(P, Q)$. Da H eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, kann man auf H eine Metrik $\tilde{\varrho}(P, Q)$ einführen.

Nun bestimmt man zu jedem ν eine Nummer μ_ν , so daß

$$(9.60) \quad \tilde{\varrho}(Q_\nu^\mu, Q_\nu) \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{für} \quad \mu \geq \mu_\nu,$$

$$(9.61) \quad \varrho(P_\nu^\mu, P_\nu) \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{für} \quad \mu \geq \mu_\nu$$

gilt. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$(9.62) \quad \varrho(P_\nu^{\mu_\nu}, R) \leq \varrho(P_\nu^{\mu_\nu}, P_\nu) + \varrho(P_\nu, R) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(P_\nu, R)$$

also

$$(9.63) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varrho(P_\nu^{\mu_\nu}, R) = 0.$$

Es strebt $P_\nu^{\mu_\nu} = P(\nu) \rightarrow R$ für $\nu \rightarrow \infty$. Da die inverse Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ offen ist, gibt es eine Teilfolge ν_λ , so daß $Q(\nu_\lambda) = \tau(P(\nu_\lambda)) \rightarrow R^* \in N$ für $\lambda \rightarrow \infty$ strebt. Es ist

$$(9.64) \quad \tilde{\varrho}(R^*, Q_{\nu_\lambda}) \leq \tilde{\varrho}(R^*, Q(\nu_\lambda)) + \tilde{\varrho}(Q(\nu_\lambda), Q_{\nu_\lambda}) \leq \tilde{\varrho}(R^*, Q(\nu_\lambda)) + \frac{1}{\nu_\lambda} = \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\circ} (1).$$

Es strebt $Q_{\nu_\lambda} \rightarrow R^*$ für $\lambda \rightarrow \infty$ und es ist Q_{ν_λ} in $C(P_{\nu_\lambda})$ enthalten. Ist K eine kompakte Umgebung von R^* mit $K \subset V$, so dringen in K unendlich viele $C(P_\nu)$ ein. Da $C(P_\nu)$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V ist und in N^* liegt, besteht es aus irreduziblen Teilen von N^* der Dimension 2. Verschiedene $C(P_\nu)$ enthalten verschiedene irreduzible Teile von N^* , also dringen in K unendlich viele irreduzible Teile von N^* ein, was falsch ist. In H hat M_0 keinen Häufungspunkt, w. z. b. w.

Haben bei der meromorphen und beiderseits offenen Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \left(\begin{smallmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{smallmatrix} \right)$ die Mannigfaltigkeiten G und H eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so haben die Mengen M_0 und N_0 der singulären Punkte von τ bzw. v in G bzw. H keinen Häufungspunkt. Bei der Erzeugung der σ -Prozesse wird man also in die einzelnen isolierten Punkte von M_0 bzw. N_0 die erste „Rate“ von σ -Sphären einsetzen. Man erhält eine neue Modifikation, mit der man entsprechend verfährt. Dabei geschieht es dann nach und nach, daß die entstehenden neuen Modifikationen auf den irreduziblen Teilen der Mengen $C(P_0)$ nichts mehr ändern. Schließlich kommt man beiderseits — bis auf analytische Äquivalenz — zur selben Mannigfaltigkeit. Das ist die grobe Schilderung des Prinzips, nach dem die Modifikation $\mathfrak{M}$ in den nächsten beiden Arbeiten durch σ -Prozesse erzeugt werden wird. Man sieht, welche Rolle hierbei der Hauptsatz über meromorphe Modifikationen spielt.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954.)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt,
B. L. van der Waerden.

Soeben erschienen:

LXXIII. Band:

Einführung in die Verbandstheorie

Von Hans Hermes, Dr. rer. nat., o. Professor an der Universität Münster i. Westf.
Mit 24 Abbildungen. VIII, 164 Seiten Gr.-8°. 1955.

DM 19.80; Ganzleinen DM 22.80

Inhaltsverzeichnis: **I. Grundlagen:** Verbände. Halbordnungen. Ordnungstheoretische Charakterisierung der Verbände. Isomorphismen und Homomorphismen. Teilverbände und Teilbünde; Perspektivitäten. Vollständige Verbände. Der Verband der Teilalgebren einer Algebra. — **II. Die einfachsten Verbandsklassen:** Distributive und modulare Verbände. Charakterisierung der modularen und distributiven Verbände. Komplementäre Verbände, Boolesche Algebren. Atomare Verbände. Ideale in den verschiedenen Verbandsklassen. Einbettung in vollständige Verbände. — **III. Modulare Verbände:** Einige einfache Eigenschaften modularer Verbände. Der Verband der linearen Teilräume einer projektiven Geometrie. Verbandstheoretische Charakterisierung der projektiven Geometrien. Einige Eigenschaften der projektiven Geometrien. Zerlegungsverbände. Vertauschbare Äquivalenzrelationen. Lineare Abhängigkeit. — **IV. Distributive und Boolesche Verbände:** Darstellung der distributiven Verbände und Mengenverbände. Irreduzible Elemente in distributiven Verbänden. Algebraische Charakterisierung der Booleschen Verbände. Topologische Charakterisierung der Booleschen Verbände. Unendliche distributive Gesetze. — **V. Verschiedenes:** Das Zornsche Lemma. Kongruenzrelationen in Verbänden. Die Boolesche Algebra und die zweiwertige Logik. — Anhang. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Die Verbandstheorie ist in neuerer Zeit in den Vordergrund des mathematischen Interesses getreten, weil sie ebenso wie die Gruppentheorie im Prinzip sehr einfache Zusammenhänge betrachtet und so (fast noch mehr als die Gruppentheorie) in den verschiedensten Gebieten der Mathematik Anwendung findet. Es handelt sich um die Untersuchung von Strukturen, die allgemeiner sind als geordnete Mengen, die aber mit den geordneten Mengen gemeinsam haben, daß es zu je zwei Elementen immer ein kleinstes beide umfassendes und ein größtes in beiden enthaltenes Element gibt.

Das vorliegende Buch will eine Einführung in die Verbandstheorie und ihre Anwendungen geben. Die Beweise werden ziemlich ausführlich dargestellt. An den meist leichten Übungsaufgaben am Ende des Paragraphen kann der Leser kontrollieren, wie weit er den Text verstanden hat. Die Beispiele sind aus den Grundlagen der Geometrie, der Algebra und der Topologie gewählt und setzen damit eine gewisse mathematische Allgemeinbildung voraus.

In einem Anhang werden die wichtigsten logischen und mengentheoretischen Begriffe zusammengestellt. Insbesondere werden Symbole für die einfachsten logischen Verknüpfungen eingeführt. Ich habe mich nicht gescheut, diese Symbole auch ab und zu im Text zu verwenden, da so in vielen Fällen die logische Struktur einer Aussage deutlicher hervortritt, und da man insbesondere oft mit Äquivalenzen ebenso bequem rechnen kann, wie es der Mathematiker schon immer mit Gleichungen zu tun gewöhnt ist. Es kommt hinzu, daß in wichtigen Verbänden die verbandstheoretischen Operationen unmittelbar mit aussagenlogischen Verknüpfungen zusammenhängen. — Im Anhang werden weiter einige Begriffe aus der „universellen Algebra“ zusammengestellt, um auf dieser Basis dem Leser deutlich zu machen, daß viele verbandstheoretische Begriffe denselben Ursprung haben wie analoge Begriffe, die er aus der Gruppentheorie oder anderen mathematischen Disziplinen bereits kennt.

Dieses Buch will keine vollständige Übersicht über die Verbandstheorie geben, um den Charakter einer Einführung zu wahren, jedoch finden sich am Schluß der einzelnen Paragraphen weiterführende Literaturangaben.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen

Von Dr. Lothar Heffter, Geh. Hofrat, Professor an der Universität Freiburg i. Br.
Mit 13 Abbildungen im Text. VIII, 63 Seiten Gr.-8°. 1955.

Steif geheftet DM 12.60

Inhaltsverzeichnis: **A. Vorkenntnisse:** 1. Unendliche Folgen. 2. Unendliche Reihen. 3. Reelle Funktionen $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x . 4. Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x) dx$. 5. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze und das unbestimmte Integral. 6. Paare von reellen Veränderlichen x, y . 7. Reelle Funktionen $f(x, y)$ der reellen Veränderlichen x, y . 8. Totale und partielle Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x, y)$. 9. Treppintegral $\int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} (f(x, y) dx + g(x, y) dy)$. 10. Flächenintegral einer Funktion $f(x, y)$. 11. Gauss'sche Sätze über Flächenintegral und Randintegral. 12. Komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen $z = x + y i$. 13. Komplexe Treppintegrale $\int_{z_0}^z f(z) dz$. 14. Potenzreihen und ihr Konvergenzkreis. 15. Eindeutigkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Potenzreihe. 16. Gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe. — **B. Sechs verschiedene Wege zur Begründung der Funktionentheorie:** I. Definition der „analytischen Funktion“. 17. Der historische Weg von Cauchy über Weierstrass zurück zu Cauchy. — II. Die Wege von Cauchy 1814 und Goursat 1900. 18. Der (alte) Cauchysche Integralsatz. 19. Der Goursatsche Integralsatz. 20. Die Cauchysche Integralformel für $f(z)$. 21. Potenzreihendarstellung von $f(z)$. — III. Der Weg von Looman-Menchoff 1933. 22. Der Satz von Looman-Menchoff und seine Geschichte. 23. Neuer Beweis des Satzes von Looman-Menchoff 1954. — IV. Ältere Wege bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$. 24. Der Satz von Morera von 1886. 25. Der Weg von Osgood von 1896. 26. Der Weg von Morera von 1901. — V. Der einfachste Weg bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$ 1936. 27. Achsenparallel eindeutige Integrierbarkeit von $f dz + g dy$. 28. Achsenparallel eindeutige Integrierbarkeit von $f(z)$. 29. Der Hauptsatz dieses Weges. — VI. Ein neuer Weg unter Benutzung von Polarkoordinaten 1951. 30. Eine allgemeine Eigenschaft jeder analytischen Funktion $f(z)$. 31. Eine weitere derartige Eigenschaft jeder analytischen Funktion $f(z)$. 32. Ein entsprechender Eingang in die Funktionentheorie. 33. Umformung der Voraussetzung in Kap. VI. — VII. Vergleich der Voraussetzungen in Kap. II—VI. 34. Vergleich im einzelnen und allgemeine Bemerkungen. — **C. Originalliteratur zur Geschichte der Begründung der Funktionentheorie:** — Lehrwerke der Funktionentheorie. — Verzeichnis der benutzten Begriffe.

Aus dem Vorwort: Unter „Begründung der Funktionentheorie“ verstehen wir die auf möglichst elementarem Weg gewonnene Darstellung einer Funktion $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ von $z = x + y i$ durch gewöhnliche Potenzreihen, wenn über $f(z)$ gewisse möglichst elementare Voraussetzungen gemacht werden. Diese können sehr verschiedener Art sein. Während aber wohl alle Lehrbücher der Funktionentheorie nur einen der beiden „klassischen“ Wege verfolgen, bei denen die Existenz der Ableitung $f'(z)$ (Goursat) oder deren Existenz und Stetigkeit (Cauchy) den Ausgangspunkt bildet, werden hier außer jenen beiden noch vier andere Wege bis zu dem genannten Endziel gebahnt. ...

Abschnitt A bringt Vorkenntnisse, die unmittelbar oder mittelbar wirklich benutzt werden, und zwar mit Beweisen der angeführten Sätze. Auch werde ausdrücklich betont, daß außer Kreisen keine gekrümmten ebenen Linien und über solche erstreckten Integrale bei uns auftreten. Durch diese beiden Umstände ist die vorliegende Schrift bereits für Studenten vom 2. Semester an lesbar.

Der Hauptabschnitt B bringt nach obigem sechs verschiedene ältere, neuere und ganz neue Eingänge in die Funktionentheorie. ...

Abschnitt C stellt einen Beitrag zur Geschichte der Begründung der Funktionentheorie dar in Gestalt einer reichhaltigen, chronologisch geordneten Liste einschlägiger Originalliteratur, jeweils mit kurzen Inhaltsangaben. ...

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg,
und ein Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.